

Администрация городского округа Самара

Муниципальное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Самарский муниципальный институт управления»

Кафедра Математических методов и информационных технологий

В.К.Семёнычев, В.Д. Павлов, В.В.Семёнычев

**Моделирование и прогнозирование
нелинейной экономической динамики с
логистическим трендом**

Методические указания к выполнению лабораторной работы

Самара
Издательство «Самарский муниципальный институт управления»
2008

УДК 51-77+519.23

ББК 65.23+65.40

С 30

*Печатается по решению Учебно-методического совета
МОУ ВПО «Самарский муниципальный институт управления»*

С 30 Семёнычев, В.К. Моделирование и прогнозирование нелинейной экономической динамики с логистическим трендом : методические указания / В.К. Семёнычев, В.Д. Павлов, В.В. Семёнычев. - Самара: Изд-во «Самарский муниципальный институт управления», 2008. – 20с.

Методические указания предназначены для студентов очной и заочной форм обучения, изучающих курсы «Эконометрика», «Статистика», «Компьютерный анализ статистических данных» и «Маркетинг».

Методические указания содержат теоретические сведения о моделях временных рядов экономической динамики показателей с логистическим трендом, а также многокомпонентных рядах динамики, которые кроме логистического тренда наблюдения содержат еще и дополнительный линейный тренд и колебательную компоненту в виде гармоник.

Описан метод параметризации данных моделей с помощью параметрических моделей авторегрессии-скользящего среднего.

ББК 65.23+65.40

© Семёнычев В.К., Павлов В.Д., Семёнычев В.В., 2008

© Издательство «Самарский муниципальный институт управления», 2008

Содержание

Теоретическая часть	4
Практическая часть	11
Оформление результатов лабораторной работы	18
Контрольные вопросы	18
Рекомендуемая литература.....	19

Теоретическая часть

Разнообразные содержательные задачи экономического анализа требуют использования статистических данных, характеризующих исследуемые экономические процессы и развернутые во времени в форме временных рядов. При этом нередко одни и те же временные ряды используются для решения различных по постановке и содержанию проблем.

Временные ряды или, как их еще называют, динамические ряды - один из самых распространенных объектов изучения эконометрического анализа и прогноза. В них наиболее концентрировано отражаются изменения экономических объектов и явлений, позволяя достаточно тщательно проанализировать особенности развития [1].

Анализ временных рядов альтернативен подходу, заключающемуся в построении многофакторных моделей экономических процессов и явлений. В одномерном временном ряде, как функции времени, интегрально отображается множество факторов действующих на показатель.

Фактически, временной ряд - это множество последовательных наблюдений, упорядоченных во времени по уровням состояния либо изменения некоторого изучаемого явления.

Как правило, уровни временного ряда в экономике отражают значения какого-либо показателя на определенный момент времени (моментные наблюдения) либо за какой-то промежуток (интервальные наблюдения).

Если время, через которое проводится очередное измерение величины, квантуется на равные промежутки времени (такты, шаги, периоды опроса), то ряд называется полным дискретным рядом, если принцип равных интервалов не соблюдается – ряды именуют неполными.

Примером такта полного дискретного временного ряда экономического показателя может быть день, неделя, месяц и так далее.

В данной лабораторной работе рассматриваются только полные дискретные ряды.

Начиная изучение особенностей модельного представления динамических рядов, мы будем исходить из того, что большинство объектов исследования, т.е. социально-экономических показателей формируется под воздействием огромного множества – главных и второстепенных, объективных и субъективных, прямых и косвенных тесно взаимосвязанных друг с другом и часто действующих в различных направлениях тенденций.

Вследствие этого при анализе динамики временных рядов исходят из априорной гипотезы о наличии в них двух основных компонент: детерминированной (систематической, неслучайной) и стохастической (случайной).

В общем случае модель временного ряда имеет следующий вид:

$$y_t = f(t) + \varepsilon_t,$$

где - $f(t)$ систематическая составляющая ряда, ε_t случайная составляющая ряда, для которой обычно принимают справедливыми условия Гаусса-Маркова: нормальный закон распределения вероятностей ее значений, ну-

левое математическое ожидание $M[\varepsilon_t] = 0$, постоянство дисперсии $D[\varepsilon_t] = \sigma^2$ (гомоскедастичность), некоррелированность (дельта-коррелированность) $M[\varepsilon_t, \varepsilon_s] = 0$, где M - оператор математического ожидания, D - оператор дисперсии.

В свою очередь, детерминированная (систематическая) составляющая может быть тоже разложена на отдельные, детерминированные компоненты. В практике эконометрических исследований различают три вида таких составляющих.

Долговременная (вековая) составляющая, формирующая общую в длительной перспективе тенденцию в изменении анализируемого признака y_t . Обычно эта тенденция описывается с помощью той или иной неслучайной функции - $f(t)$, как правило, монотонной. Эту функцию называют функцией тренда или просто - трендом.

Сезонная составляющая - $s(t)$ формируется под влиянием сезонных колебаний экономического показателя в течение заданного периода времени, обычно года.

Циклическая (конъюнктурная) составляющая - $c(t)$, формирующая изменения анализируемого признака в связи с действием долговременных циклов экономической, демографической или астрофизической природы (волны Кондратьева, демографические «ямы» и пики, циклы солнечной активности и т.п.).

На практике различают четыре основных типа экономического роста (аналогичная классификация может быть применена и для динамических рядов со снижающимися значениями абсолютного цепного прироста) [1, 2, 3]:

1) постоянный рост (с постоянным или близким к нему абсолютным цепным приростом);

2) увеличивающийся рост (с увеличивающимся абсолютным цепным приростом);

3) уменьшающийся рост (с уменьшающимся абсолютным цепным приростом);

4) рост с качественными изменениями динамических характеристик на протяжении исследуемого периода.

В экономической практике широкое распространение получили процессы логистической динамики, которые по предложенной выше классификации относятся к четвертому типу. Такие процессы сначала растут медленно, затем ускоряются, а затем снова замедляют свой рост, стремясь к какому-либо пределу или уровню насыщения (рис.1).

В качестве процессов, изменяющихся по логистическим законам, можно привести следующие:

- изменение спроса на товары, обладающие способностью достигать некоторого уровня насыщения;

- рост систем разнообразной природы в зависимости от их возраста или увеличения масштаба (доля жилищ в городах, имеющих горячее водоснабжение или центральное отопление);

- доля неграмотных жителей среди населения;
 - доля насыщения рынка новыми товарами и услугами, в том числе описание числа пользователей российского Интернета;
 - оценка изменения числа семей, имеющих радио и телевидение;
 - рост населения страны в страховых исследованиях;
 - развитие биологических популяций;
 - развитие тех или иных показателей технологических нововведений,
- и т.д.

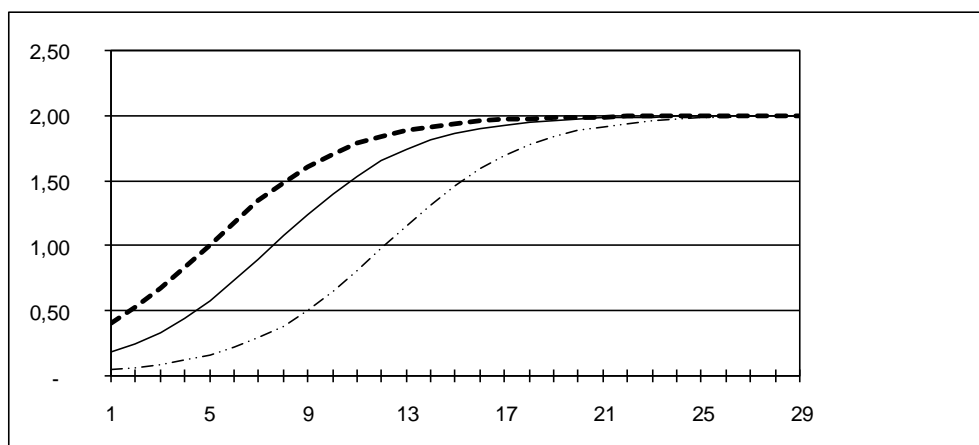


Рис.1. Примеры логистического тренда

Уникальным свойством логистического тренда является его способность прогнозировать качественные изменения в развитии динамики, характеризующиеся сменой знака производной.

Известно порядка десятка моделей, описывающих процессы данного типа [1]. Обычно для идентификации логистической динамики используют модель Верхульста (Перла-Рида):

$$f(t) = \frac{1}{A_0 + A_1 \exp(-\alpha_1 t)},$$

и модель Гомперца:

$$f(t) = AB^{c^t}.$$

К недостаткам данных моделей следует отнести следующее:

- известные методы параметризации данных моделей обычно предполагают априорное знание значений уровня насыщения, знание которого зачастую представляет самостоятельный интерес;
- отсутствуют методы их параметризации при наличии других компонент (колебательных компонент, трендов других моделей) в рядах динамики, что зачастую имеет место в реальной эконометрической практике.

Для моделирования логистической динамики особый интерес представляет использование функции Рамсея [3]. Она передает логистическую тенденцию тренда и, как показали исследования, оказывается удобной для идентификации и прогнозирования, особенно при постулировании многокомпонентности ряда динамики.

Функция $f(t)$ Рамсея в цифровой форме имеет вид:

$$T_k = C(1 - (1 + \alpha k \Delta)) \exp(-\alpha k \Delta),$$

где C и α - параметры модели, $k = 0, 1, \dots, N$ - номер наблюдения, N - объем выборки, Δ - период дискретизации динамической траектории (год, квартал, месяц, декада, день, час и т.д.).

При моделировании временного ряда динамики Y_k будем использовать декомпозицию на основной тренд T_k (относительно медленно изменяющийся во времени) и более динамичные составляющие, как правило, являющиеся меньшими по уровню.

В качестве составляющих зачастую используют колебательную компоненту S_k , которая может быть обусловлена, например, сезонными факторами, и линейный тренд L_k , который может отражать инфляционные процессы.

Также необходимо учитывать существенно меньшую по значениям и высокодинамичную стохастическую компоненту ξ_k .

Для моделирования колебательной компоненты будем использовать гармонику $A_1 \sin(\omega k \Delta + \varphi)$, где A_1 - амплитуда гармоники, ω - частота гармоники, φ - фаза гармоники, $k = 0, 1, \dots, N$ - номер наблюдения, а для линейной составляющей будем использовать выражение $A_2 k \Delta$, где A_2 - параметр, $k = 0, 1, \dots, N$ - номер наблюдения.

Таким образом, при различных сочетаниях предложенных моделей компонент получим следующее семейство моделей:

$$Y_k = C(1 - (1 + \alpha k \Delta)) \exp(-\alpha k \Delta) + \xi_k \quad (1)$$

$$Y_k = C(1 - (1 + \alpha k \Delta)) \exp(-\alpha k \Delta) + A_1 k \Delta + \xi_k \quad (2)$$

$$Y_k = C(1 - (1 + \alpha k \Delta)) \exp(-\alpha k \Delta) + A_1 \sin(\omega k \Delta + \varphi) + \xi_k \quad (3)$$

$$Y_k = C(1 - (1 + \alpha k \Delta)) \exp(-\alpha k \Delta) + A_1 \sin(\omega k \Delta + \varphi) + A_2 k \Delta + \xi_k \quad (4)$$

Далее проведем параметрическую идентификацию построенных моделей для ряда с логистической тенденцией, т.е. найдем такие значения параметров моделей, при которых выбранная модель будет наиболее точно описывать исследуемый экономический процесс.

На данный момент известно несколько способов параметризации рядов динамики с колебательной компонентой путем сезонной декомпозиции. Однако все они являются непараметрическими и предполагают последователь-

ное сглаживание ряда для длительности от 4 до 10 периодов колебательной компоненты [1]. Естественно, что подобные статистические данные (до 120 ежемесячных наблюдений) зачастую просто отсутствуют, и, главное, за такой интервал времени происходят существенные изменения в моделируемых экономических процессах (как в параметрах моделей, так и в виде самих моделей).

При этом модель предполагается стационарной на этом периоде и мониторинг динамики (вариации) параметров и структуры модели оказывается невозможен.

В данной лабораторной работе предлагается использовать новый способ параметризации рядов динамики, приведенными аналитическими выражениями на основе параметрических моделей авторегрессии-скользящего среднего (ARMA-моделей), способы конструирования которых подробно описаны в [2, 3, 4].

При этом приходим к ARMA-моделям в уровнях ряда динамики, коэффициенты λ_i которых линейно входят в AR-часть ARMA-моделей, можно определять по выборке наблюдений Y_k известным методом наименьших квадратов (МНК).

Главное в предлагаемом подходе заключается в том, что коэффициенты λ_i ARMA-моделей оказываются функциями некоторого числа параметров A_0, A_1, \dots, A_q моделей, существенно нелинейных по параметрам. В этом смысле ARMA-модели можно называть параметрическими [3, 4].

Тем самым при моделировании осуществляется своеобразная перепараметризация модели: некоторые параметры, существенно нелинейно входящие в неё, трансформируются в линейные коэффициенты λ_i ARMA-модели.

Рассмотрим предложенный способ на конкретном примере, а именно, осуществим параметризацию модели (2), для которой справедлива параметрическая модель авторегрессии-скользящего среднего при $k \geq 4$

$$Y_k = 2Y_{k-1} - Y_{k-2} + \lambda_1(2Y_{k-1} - 4Y_{k-2} + 2Y_{k-3}) - \lambda_1^2(Y_{k-2} - 3Y_{k-3} + Y_{k-4}) + \xi_k, \quad (5)$$

где

$$\xi_k = 2\theta_{k-1} - \theta_{k-2} + \lambda_1(2\theta_{k-1} - 4\theta_{k-2} + 2\theta_{k-3}) - \lambda_1^2(\theta_{k-2} - 3\theta_{k-3} + \theta_{k-4}), \lambda_1 = \exp(-\alpha\Delta).$$

Параметризацию модели (2) проведем в два этапа. На первом, применяя метод наименьших квадратов (МНК) на объеме N выборки, найдем оценку параметра λ_1^0 из условия:

$$\lambda_1^0 = \arg \min_{\lambda_1} \sum_{k=4}^N (Y_k - (2Y_{k-1} - Y_{k-2} + \lambda_1(2Y_{k-1} - 4Y_{k-2} + 2Y_{k-3}) - \lambda_1^2(Y_{k-2} - 3Y_{k-3} + Y_{k-4})))^2, \quad (6)$$

которое приводит к нормальной системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) второго порядка.

По найденному значению λ_1^0 рассчитаем оценку параметра α^0 , в соответствии с принятым в (6) обозначением, по формуле:

$$\alpha^0 = -\frac{\ln \lambda_1}{\Delta}.$$

На втором этапе для параметризации параметров C , A_1 и используем условие

$$C^0, A_1^0 = \arg \min_{C, A_1} \sum_{k=0}^N (Y_k - (C(1 - (1 + \alpha^0 k \Delta) \exp(-\alpha^0 k \Delta)) + A_1 k \Delta))^2, \quad (7)$$

которое приводит к нормальной СЛАУ второго порядка и определению оценок C^0 и A_1^0 .

Параметризация других моделей (1), (3), (4) производится аналогичным способом. После параметризации модели необходимо оценить точность моделирования ее исходного ряда динамики и прогнозирования ее значений ряда.

В качестве критерия точности моделирования обычно принимают коэффициент детерминации [1, 4]:

$$R^2 = \frac{\sum_{k=0}^N (Y_k^0 - M[Y_k])^2}{\sum_{k=0}^N (Y_k - M[Y_k])^2} = 1 - \frac{\sum_{k=0}^N (Y_k^0 - Y_k)^2}{\sum_{k=0}^N (Y_k - M[Y_k])^2}, \quad (8)$$

где Y_k^0 - модельные (сглаженные) значения уровней ряда динамики Y_k .

Для оценки точности прогнозирования используем МАРЕ-оценку прогноза [1, 4]:

$$\gamma = \frac{1}{l} \sum_{k=1}^l \frac{|Y_k - Y_k^*|}{Y_k} 100\%, \quad (9)$$

где Y_k - фактическое значение прогнозируемого показателя на k -й момент времени, Y_k^* - модельное значение показателя на k -й момент времени; l - период упреждения (горизонт прогноза).

При этом имеющаяся статистическая выборка разбивается на две части: рабочую, по которой и строится модель, и на контрольную для некоторого числа l наблюдений, которой осуществлялся прогноз по построенной модели.

Изучение прогностических возможностей моделей временных рядов - чрезвычайно важная составляющая всего инструментария экономико-математического моделирования и прогнозирования ввиду их чрезвычайной распространенности в экономике. Так как прогнозирование значений соот-

ветствующих экономических показателей на основе доступных к моменту времени $t = N$ наблюдений временного ряда y_t на один или несколько временных тактов вперед может явиться основой для:

- обоснования стратегических решений во всех сферах бизнеса, а также государственного управления;
- планирования тенденций различных масштабов, уровня иерархии, срочности в экономике, производстве, торговле и т.д.;
- управления и оптимизации социально-экономических процессов, протекающих в обществе;
- управления важными параметрами демографических и экологических процессов;
- обоснования среднесрочных и оперативных решений в бизнесе и государственном управлении и др.

Практическая часть

Для проверки работоспособности предложенных моделей разработан программный комплекс, позволяющий осуществлять моделирование и прогнозирование временных рядов. Каждой группе из 3-4 студентов выдается тестовая выборка. Необходимо провести моделирование данной выборки указанными четырьмя моделями и по результатам моделирования выбрать ту модель из них, которая наиболее соответствует данной выборке.

Процесс моделирования начинается с запуска программы, после чего на экране появляется главное окно программы, общий вид которого представлен на рисунке 2.

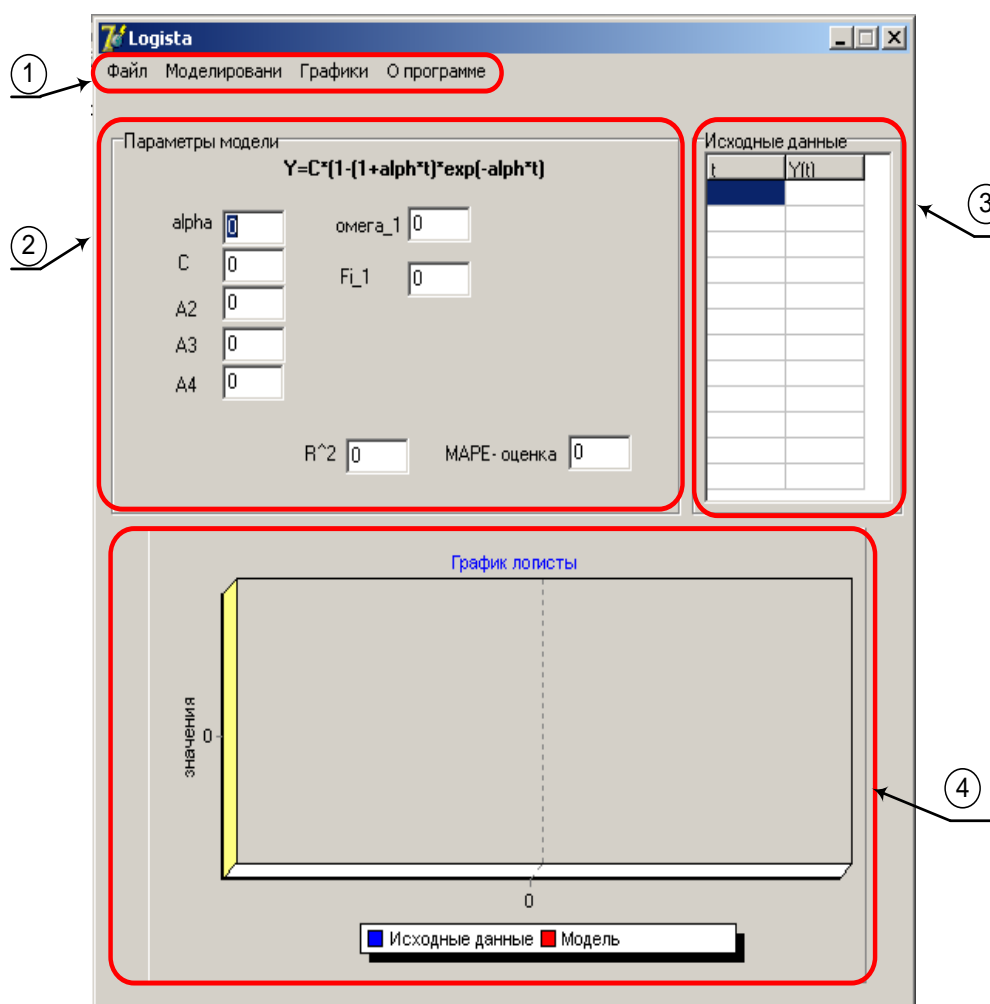


Рис 2. Главное окно программы

В главном окне программы условно можно выделить четыре области:

1. *Главное меню* – посредством данного меню осуществляется весь процесс моделирования и прогнозирования.

2. *Область параметров модели* – в данной области отображаются расчетные значения параметров выбранной модели, а также такие критерии точности модели и точности ее прогнозирования, как коэффициент детерминации и MAPE-оценка, соответственно.

3. *Область отображения исходных данных* - в данной области отображаются исходные данные, после того, как они были загружены из файла с данными.

4. *Область построения графиков модели* – в данной области выводятся графики исходных и смоделированных данных.

Процесс моделирования начинается с загрузки исходных данных. Чтобы выполнить данную операцию, необходимо выбрать пункт меню «Файл» - «Открыть» (рис. 3).

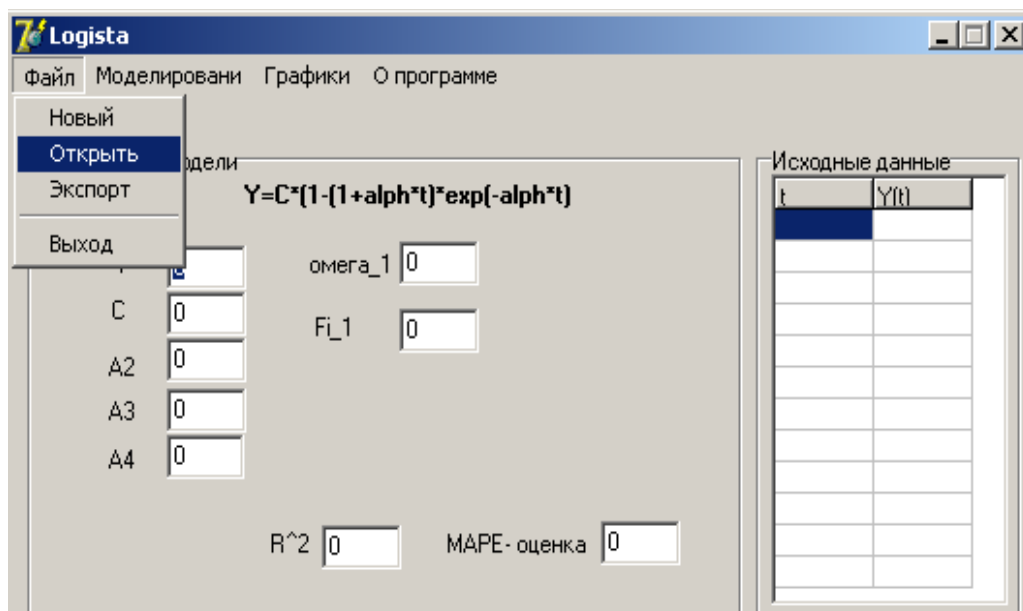


Рис. 3. Процедура загрузки данных из файла

После выполнения данной операции откроется стандартное диалоговое Windows-окно выбора открываемого файла. Вам необходимо выбрать файл с номером, соответствующим номеру вашего варианта. Результатом выполнения данной операции является загрузка исходных данных в программу, что визуально отображается в поле исходных данных (рис. 4).

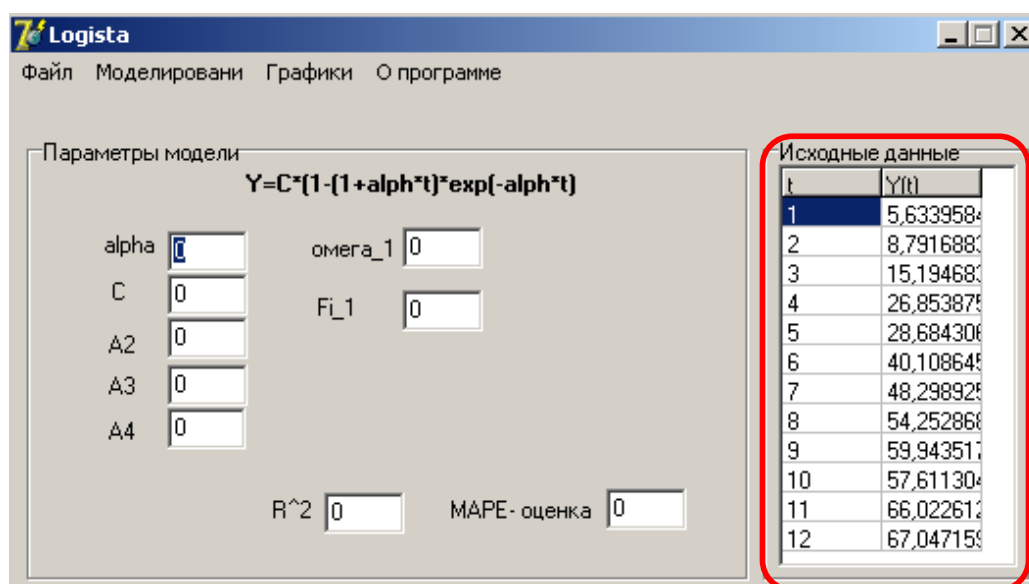


Рис.4. Загрузка исходных данных

Теперь, когда исходные данные уже загружены в нашу программу, приступаем непосредственно к процессу моделирования и прогнозирования.

Для выбора типа модели, которую мы будем использовать для описания загруженных в программу данных, необходимо выбрать в главном меню «Моделирование» - «Выбрать модель» (рис. 5), после чего на экране

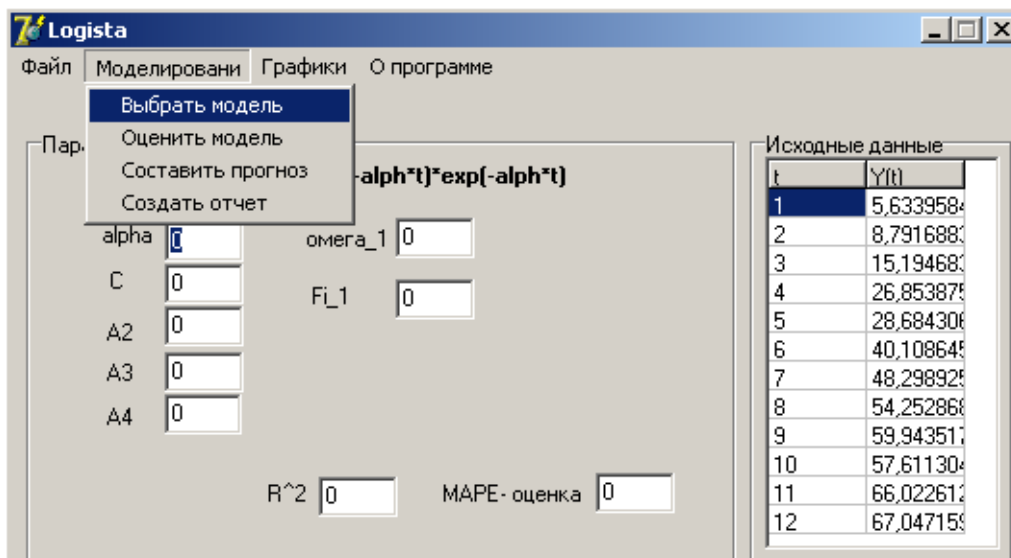


Рис.5. Меню выбора модели

появится окно выбора типа модели, изображенное на рисунке 6.

В данном окне необходимо выбрать нужный нам тип логисты и, если необходимо, глубину прогноза. В рамках лабораторной работы необходимо провести четыре эксперимента (по одному на каждую модель) с глубиной прогноза в один шаг.

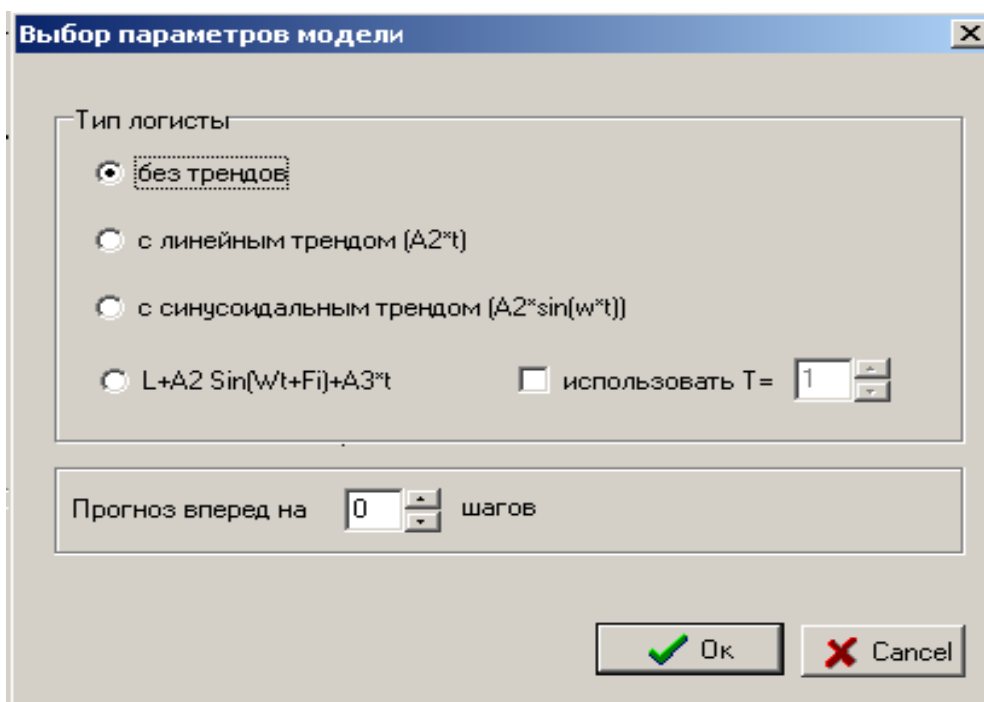


Рис. 6. Окно выбора и настройки параметров модели

При выборе типа модели особое внимание стоит уделить самой сложной модели четвертого типа. В программе предусмотрена возможность как полностью автоматизированного поиска параметров (режим по умолчанию), так и параметризация с заранее известным значением периода (параметр T). Данная опция позволяет уменьшить величину погрешности округления, возникающую при компьютерных расчетах, и, как показывает практика, во многих случаях позволяет более точно подобрать модель.

После выбора типа модели необходимо оценить степень адекватности предложенной модели. Для этого необходимо выбрать пункт меню «Моделирование» - «Оценить модель» (рис. 7).

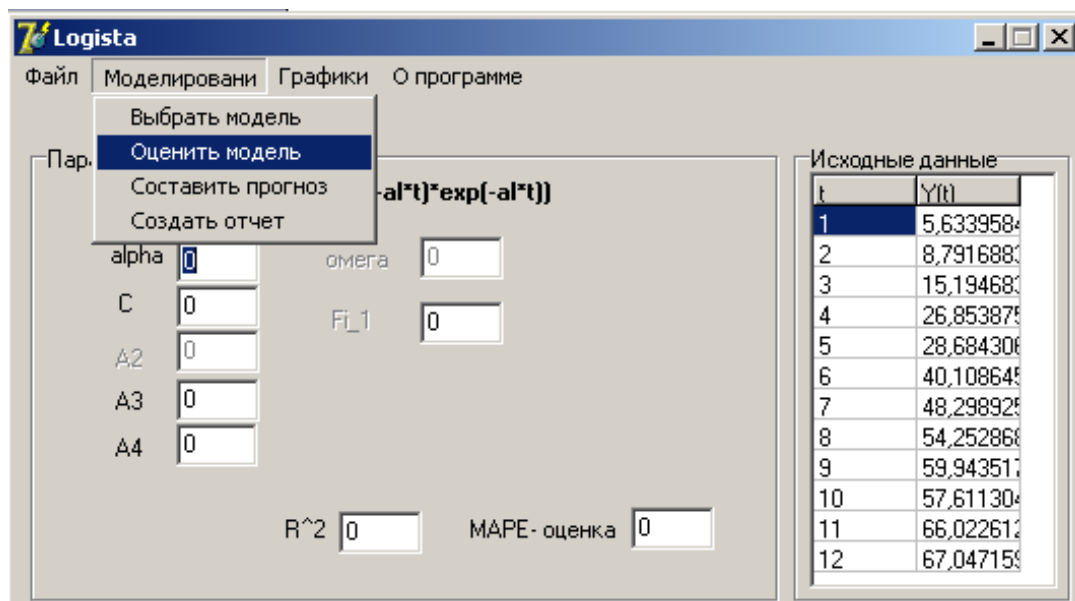


Рис. 7. Меню запуска процедуры расчета выбранной модели

После нажатия данной кнопки запускается процедура параметризации и оценки выбранной модели. В результате на главном окне программы область параметров модели заполняется найденными значениями (рис. 8).

Для визуальной оценки получившейся модели можно построить графики, содержащие как исходные, так и смоделированные данные. Для этого необходимо в меню «Графики» выбрать пункт «Построить график» (рис. 9) для построения графиков в области построения графиков модели на главной экранной форме, или пункт «Построить в отдельном окне» для построения графиков в отдельном окне.

Результаты построения графиков приведены на рисунках 10-11.

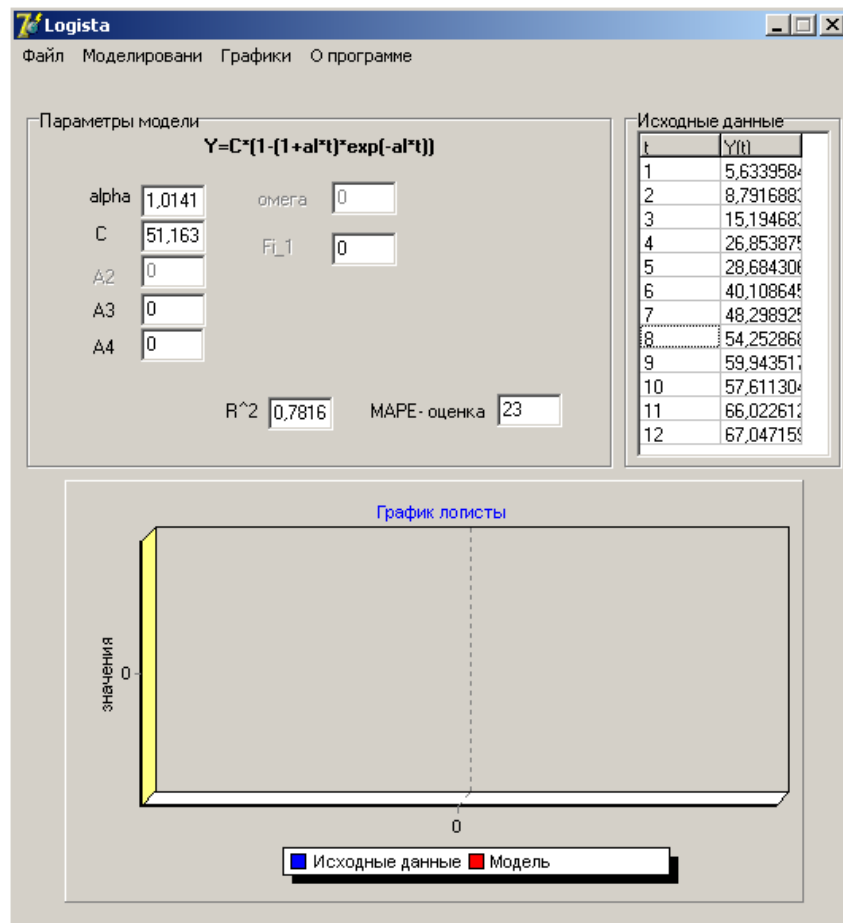


Рис. 8. Заполнение области параметров после выполнения процедуры оценки модели

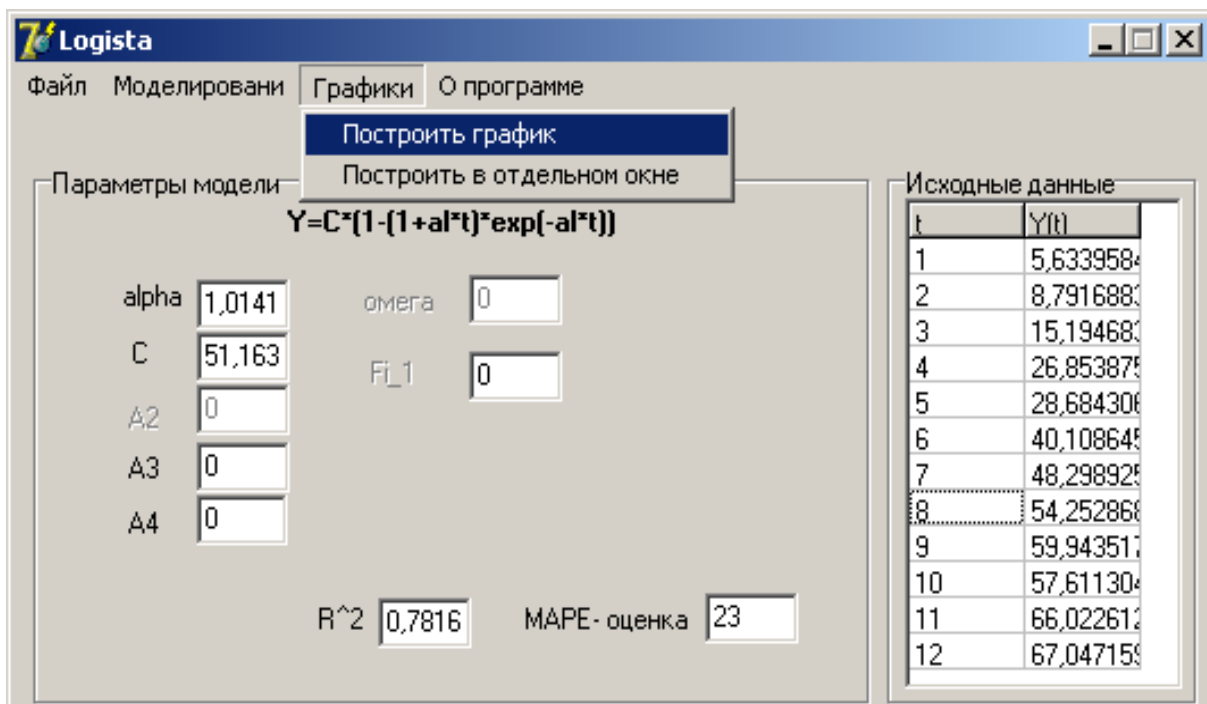


Рис. 9. Меню построения графиков модели

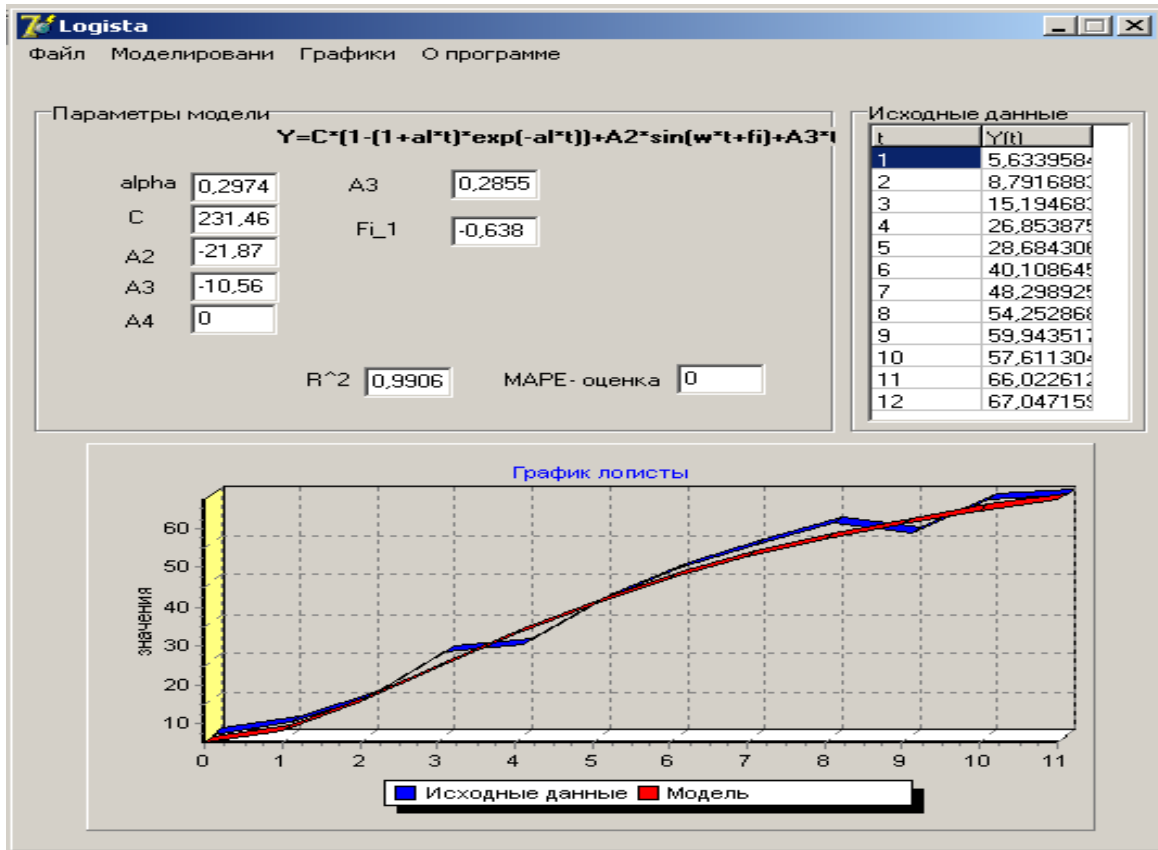


Рис. 10. Графики модели, построенные на главном окне программы

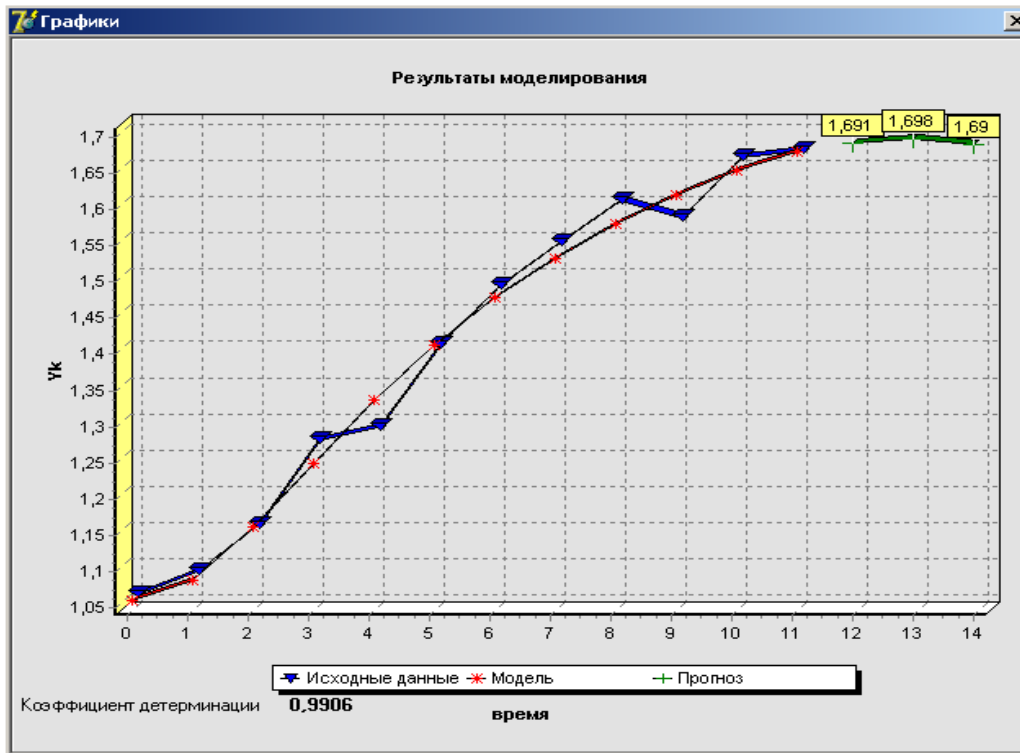


Рис. 11. Графики модели, построенные в отдельном окне

Результаты проверки моделей оформляются в виде сводной таблицы (табл. 1).

Пример сводной таблицы

Таблица 1

<i>Модель</i>	R^2	<i>МАРЕ-оценка</i>
1	0,9651	7
2	0,9714	5
3	0,9076	10
4	0,9857	3

Во второй части лабораторной работы необходимо провести исследование зависимости МАРЕ-оценки от глубины прогноза. Для этого необходимо взять модель, которая по результатам первой части лабораторной работы оказалась наиболее точной, и найти МАРЕ-оценки при глубине прогноза равной 1, 2 и 3-м шагам.

Результаты исследований также следует свести в таблицу и построить график зависимости МАРЕ-оценки от глубины прогноза.

Оформление результатов лабораторной работы

Отчет по лабораторной работе должен содержать титульный лист с указанием названия лабораторной работы, фамилиями и инициалами студентов-исполнителей, номером группы.

В отчете должны быть приведены графики исходного временного ряда, графики предложенных и идентифицированных моделей, в том числе с прогнозами, а также точности моделирования и прогнозирования, вывод в пользу выбора той или иной модели.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение полного и неполного дискретного ряда. Приведите примеры.
2. Сколько основных компонент входят во временные ряды? Перечислите их, приведите основные характеристики компонент по амплитуде, динамике и периодичности.
3. Перечислите основные составляющие детерминированной компоненты.
4. В чем различие между сезонной и циклической компонентами?
5. Перечислите основные типы экономического роста (спада). Приведите примеры.
6. К какому типу экономического роста относится логистическая динамика?
7. Приведите примеры логистической динамики для случаев, когда аргументом является физическое время и экономические параметры, например, стоимость товара или услуги, или затраты на рекламу при продвижении товара или услуги.
8. Как вычисляется MAPE-оценка прогноза?
9. Что показывает коэффициент детерминации? В каких пределах он изменяется и каковы критерии оценки модели по данному коэффициенту?
10. Если при оценке моделей выяснится, что две имеют практически одинаковый коэффициент детерминации и MAPE-оценку, то какой модели вы отдадите предпочтение и почему?
11. Как меняются знаки первой и второй производной логистического тренда? Где находится точка перегиба логистического тренда?

Рекомендуемая литература

1. Эконометрика / под ред. И.И. Елисеевой. - М.: Финансы и статистика, 2005. - 575с.
2. Семенычев В.К. Идентификация экономической динамики на основе моделей авторегрессии. – Самара: АНО «Изд-во СНЦ РАН», 2004. – 243с.
3. Семенычев В.К., Семенычев Е.В. Информационные системы в экономике. Эконометрическое моделирование инноваций. – Самара: Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2006. – 217с.
4. Семенычев В.К., Семенычев Е.В., Сергеев А.В. Идентификация многокомпонентных рядов экономической динамики при помощи программы «Econometric Research»: мет. указ. – Самара: Изд-во «Самарский муниципальный институт управления», 2008. – 24 с.

Учебное издание

Семёнычев Валерий Константинович

д.э.н., д.т.н., профессор

Павлов Владимир Дмитриевич

аспирант

Семёнычев Виталий Валерьевич

**Моделирование и прогнозирование
нелинейной экономической динамики
с логистическим трендом**

Методические указания к выполнению
лабораторной работы

Редактор Н.П. Фролова
Технический редактор С.В. Останкова
Корректор Ю.Е. Скрובה

МОУ ВПО «Самарский муниципальный институт управления»
Подписано в печать 23.07. 2008. Формат 60x84/16
Бумага офсетная. Усл. печ. л. 1,25. Тираж 100 экз.
Печать оперативная.

Издательство «Самарский муниципальный институт управления»
443084, г. Самара, ул. Стара-Загора, 96

Отпечатано на полиграфическом оборудовании издательства
«Самарский муниципальный институт управления»
443084, г. Самара, ул. Вольская, д.40