

Семенычев В.К., Кожухова В.Н. Моделирование экономической динамики логистическими кривыми с произвольной асимметрией. Вестник Поволжского государственного университета сервиса. – Тольятти, 2012. №4(24). – С.86-91.

Семенычев В.К., Кожухова В.Н.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛОГИСТИЧЕСКИМИ КРИВЫМИ С ПРОИЗВОЛЬНОЙ АСИММЕТРИЕЙ

В статье рассмотрены вопросы точности идентификации логистических трендов на примере динамики уровней проникновения сотовой связи в развитых и развивающихся странах мира с 2000 до 2010 г. Во всех случаях более точными оказались модели, в которых точка перегиба не соответствует середине интервала по оси ординат между началом логистического процесса и уровнем насыщения.

Ключевые слова: логистическая кривая с произвольной асимметрией, точка перегиба, сотовая связь, уровень насыщения, емкость рынка, модель, тренд

V.K.Semenychev, V.N.Kozhukhova

USING LOGISTIC CURVES WITH FREE ASYMMETRY FOR ECONOMIC DYNAMICS MODELING

The paper considers the issues of logistic trends identification accuracy illustrated by mobile penetration rates dynamics in developed and developing countries from 2000 to 2010. In all cases the best results have been shown by models where the point of inflection has free position and doesn't fit with the average between the beginning of the logistic process and its level of saturation.

Keywords: logistic curve with free asymmetry, point of inflection, mobile penetration, level of saturation, market capacity, model, trend

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛОГИСТИЧЕСКИМИ КРИВЫМИ С ПРОИЗВОЛЬНОЙ АСИММЕТРИЕЙ

В статье рассмотрены вопросы точности идентификации логистических трендов на примере динамики уровней проникновения сотовой связи в развитых и развивающихся странах мира с 2000 до 2010 г. Во всех случаях более точными оказались модели, в которых точка перегиба не соответствует середине интервала по оси ординат между началом логистического процесса и уровнем насыщения.

В экономике, в социологии, при анализе динамики показателей технологических процессов многочисленны примеры так называемых **логистических траекторий** роста, в которых тренд T_t^I определяемого параметра сначала растет медленно, затем ускоряется, а после точки перегиба снова замедляет свой рост, стремясь к некоторому пределу – уровню насыщения. Первая производная такой траектории положительна до уровня насыщения. Вторая производная положительна до точки перегиба, в ней – равна нулю, а после нее – отрицательна. При достижении уровня насыщения первая и вторая производные равны нулю. В ряде приложений аналогичный характер имеет не рост, а уменьшение уровней T_t^{II} траектории показателя до уровня спада (рис. 1).

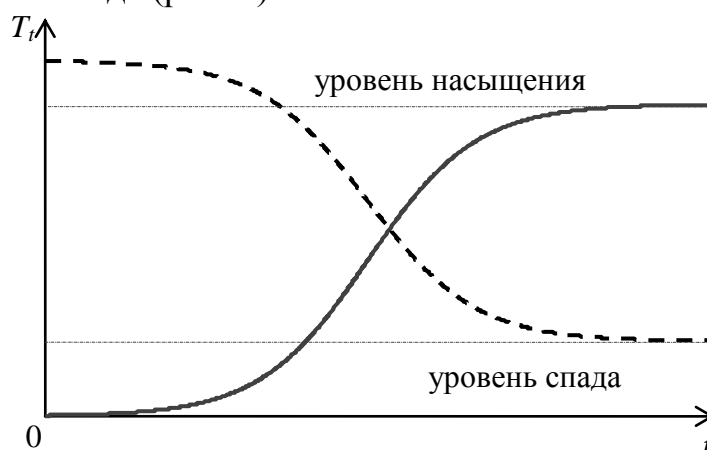


Рис. 1. Логистические траектории:

— растущая T_t^I ; - - уменьшающаяся T_t^{II}

В отечественной литературе [1, 2] обычно рассматривают две модели логистического тренда $T(t)$: кривую Верхулста (Перла, Рида) и кривую Гомпертца, представленные формулами (1) и (2), соответственно:

$$T(t) = \frac{A_0}{1 + A_1 e^{-at}}, \quad (1)$$

$$T(t) = C + A_0 \exp\left(-e^{-\alpha(t-t_0)}\right), \quad (2)$$

Здесь и далее параметр A_0 является верхней горизонтальной асимптотой или емкостью рынка, а параметр α отвечает за скорость роста рынка.

Нижняя горизонтальная асимптота для функции Верхулста равна 0, в функции Гомпертца она определена параметром C . Точка перегиба $(t^*; T(t^*))$, получаемая из условия равенства нулю второй производной, для функций (1) и (2) определяется соотношениями (3) и (4) соответственно:

$$t^* = -\frac{1}{\alpha} \ln\left(\frac{1}{A_1}\right); T(t^*) = \frac{A_0}{2}, \quad (3)$$

$$t^* = t_0; T(t^*) = \frac{A_0}{e}. \quad (4)$$

Видим, что функция Верхулста является симметричной относительно половины уровня насыщения $\frac{A_0}{2}$, а функция Гомпертца асимметрична и имеет точку перегиба, расположенную слева относительно $\frac{A_0}{2}$, при этом параметр t_0 задает абсциссу точки перегиба.

В последнее время усилилось внимание к идентификации логистических моделей с произвольной точкой перегиба, которая не соответствует середине интервала по оси ординат между началом логистического процесса и уровнем насыщения. Асимметрия может быть как левой, так и правой. Из известных двадцати моделей логистической динамики [3] далеко не все имеют произвольную точку перегиба, а из наиболее популярных – только функция Гомпертца.

Поставлена задача выбора методов идентификации нелинейных логистических моделей с симметричной и произвольной точкой перегиба, оценки достигаемой точности моделирования и прогнозирования, характеристики возможной области применения. В качестве объекта исследований взят один из наиболее быстро развивающихся сегментов мирового рынка связи и информационно-коммуникационных технологий – сотовая телефония. Именно для этого рынка особенно актуальны вопросы выбора маркетинговой стратегии, предложения новых технологических и программных решений.

Основным показателем развития рынка сотовой связи является *процент (или уровень) проникновения*, рассчитываемый как отношение числа абонентов к численности населения рассматриваемой страны (региона), которые для 2000–2010 гг. в среднем для всего мира и в разбивке по уровням развития стран [4] представлены на рис. 2.

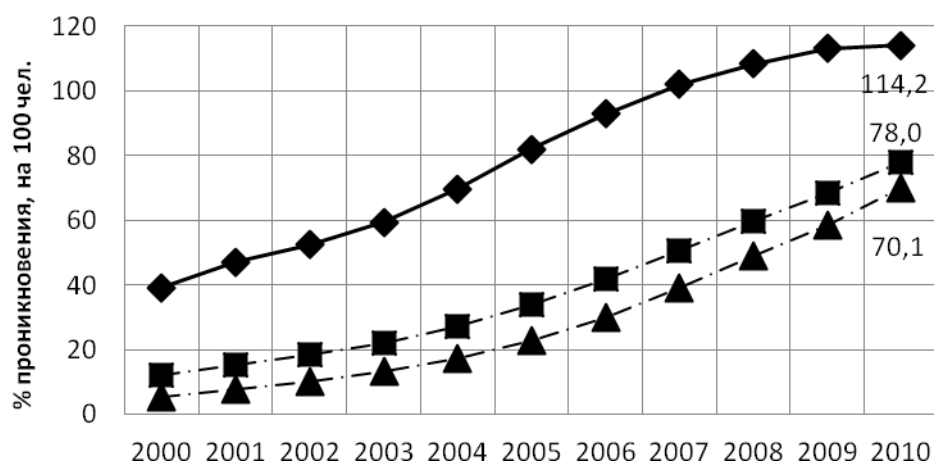


Рис. 2. Абоненты подвижной сотовой телефонной связи в 2000–2010 гг.:
 —◆— развитые страны; —▲— развивающиеся страны; —■— во всем мире

Видим, что во всех случаях динамика развития сотовой связи имеет логистический характер. Уровень проникновения сотовой связи в развитых странах в 2010 г. зафиксирован более 100%, причем темпы роста не превышают 1,5% в год. В развивающихся странах до сих пор наблюдаются высокие темпы роста числа новых абонентов (до 20% в год), а признаки замедления роста отсутствуют [5].

Рассмотрим динамику развития рынков сотовой связи на примере трех развитых стран – Дании, США и Японии (рис.3, а). Страны СНГ – Россия, Украина и Белоруссия – взяты в качестве примеров развивающихся стран (рис.3, б) [6].

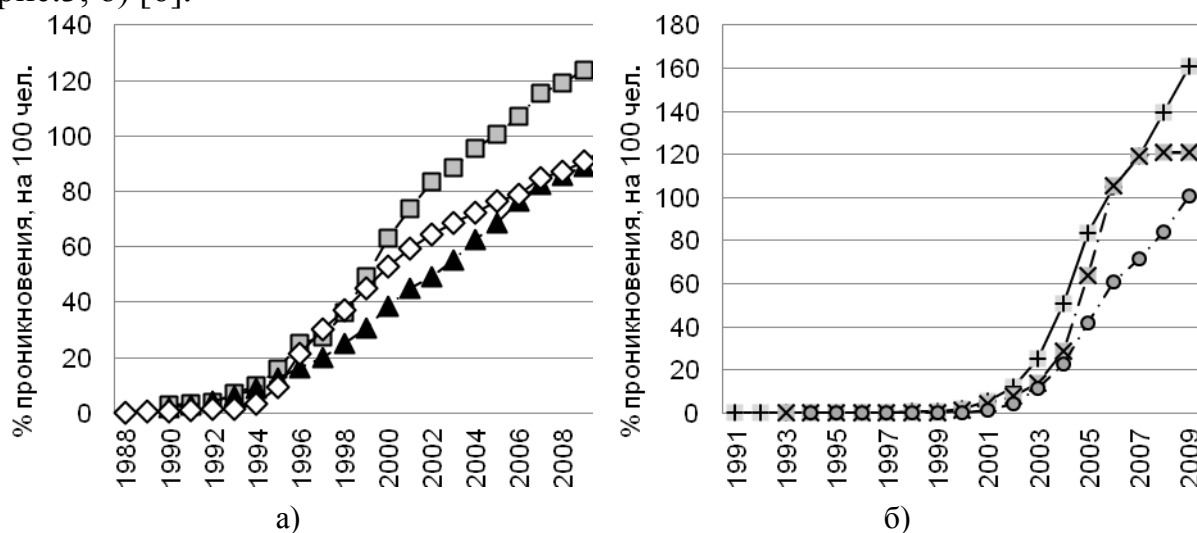


Рис. 3. Уровень проникновения сотовой связи в развитых странах (а) и странах СНГ (б):
 —□— Дания; —▲— США; —◇— Япония;
 —+— РФ; —×— Украина; —●— Белоруссия

Обратим внимание на то, что наиболее популярные логистические функции (1) и (2) могут интерпретироваться частными случаями известной функции Ричардса (5) с произвольной асимметрией при $M < 0$, $A_1 \geq 0$ [7]

$$T(t) = C + A_0 \left(1 + A_1 e^{-\alpha(t-t_0)} \right)^M,$$

$$t^* = -\frac{1}{\alpha} \ln \left(-\frac{e^{-\alpha t_0}}{A_1 M} \right); T(t^*) = C + A_0 \left(1 - \frac{1}{M} \right)^M. \quad (5)$$

Для модели (1) имеем в (5) $M = -1$, а для модели (2) $M \rightarrow \infty$. Параметр M отвечает за близость динамики к верхней или, соответственно, к нижней асимптотам [8].

Достаточно широко применяются в экономической практике и модели логистических кривых с произвольной асимметрией:

– функция Скиадаса (Джиованиса, Димотикалиса), задаваемая решением дифференциального уравнения (6) [9]:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\alpha T \left(1 - \frac{T}{A_0} \right)}{1 - \frac{T}{A_0} \cdot (1 - \gamma)}; \text{ при } \gamma \neq 1 \quad T(t^*) = \frac{A_0 (\sqrt{\gamma} - 1)}{\gamma - 1}, \quad (6)$$

– модель Шарифа и Кабира, задаваемая дифференциальным уравнением (7) [10]:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\alpha \cdot T \cdot \left(1 - \frac{T}{A_0} \right)^2}{1 - \frac{T}{A_0} \cdot (1 - \gamma)}; \text{ при } 0 < \gamma < 1 \quad T(t^*) = \frac{A_0 (-3 + \sqrt{1 + 8\gamma})}{4(\gamma - 1)}. \quad (7)$$

При $\gamma = 1$ в (6) имеем, как частный случай, симметричную логистическую модель с точкой перегиба функции $T(t^*) = \frac{A_0}{2}$. Для модели (7) имеем, как частные случаи, при $\gamma = 1$ близкую по характеру к модели Гомпертца логистическую модель с точкой перегиба $T(t^*) = \frac{A_0}{3}$, а при $\gamma = 0$ получим симметричную логистическую кривую, в которой $T(t^*) = \frac{A_0}{2}$.

Примем, как это обычно делают, аддитивной структуру модели временного ряда: $Y_t = T_t + \varepsilon_t$, где Y_t – уровни ряда динамики; ε_t – стохастическая компонента, отвечающая условиям Гаусса-Маркова [1]. Коэффициент детерминации R^2 будем использовать для характеристики точности моделирования, а $MAPE$ -оценку – для точности прогнозирования [3]. Отметим, что прогнозирование логистической модели возможно лишь в случае, когда в выборке присутствует точка перегиба и динамика приближается к уровню насыщения [11, 12].

Идентификация рассматриваемых логистических трендов (число описываемых ими частных известных случаев равно шести) должна минимизировать *нелинейную* функции ошибки.

Проведенные исследования показали, что для идентификации моделей Гомпертца и Ричардса лучшие результаты дал метод Гаусса-Ньютона (нелинейный МНК) [13], который сводит задачу минимизации нелинейной функции к итерационной минимизации линейных функций. Модель Верхулста точнее идентифицируется с помощью численного решения МНК методом Левенберга-Марквардта [14, 15]. При идентификации моделей Скиадаса и Шарифа оправдано применять эвристический алгоритм RPROP, разработанный в теории нейронных сетей [16].

Полученные результаты моделирования и прогнозирования рынков сотовой связи с горизонтом прогноза, составляющим три года, для развитых стран и стран СНГ представлены в таблице 1.

Таблица 1. Результаты моделирования и прогнозирования рынков сотовой связи стран мира

Страна	Модель	Емкость рынка, % (уровень насыщения)	Точка перегиба		R ²	MAPE
			Абсцисса	Ордината		
Япония	(7)	139,57	1995-1996гг.	16,52	0,99	3,66%
Дания	(2)	136,66	1999-2000гг.	52,35	0,99	1,10%
США	(5)	113,16	2002-2003гг.	51,19	0,99	1,59%
Россия	(6)	192,29	2004-2005гг.	55,13	0,99	0,40%
Белоруссия	(6)	138,02	2004-2005гг.	34,22	0,99	1,17%
Украина	(5)	120,92	2005-2006гг.	77,14	0,99	1,01%

Из таблицы 1 видим, что логистическая динамика всех рассматриваемых рядов динамики оказалась асимметричной относительно половины уровня насыщения. Симметричная модель Верхулста не была лучшей ни в одном из рассмотренных случаев.

На рис. 4 представлены для сравнения результаты моделирования и прогнозирования рынков сотовой связи для Дании и России.

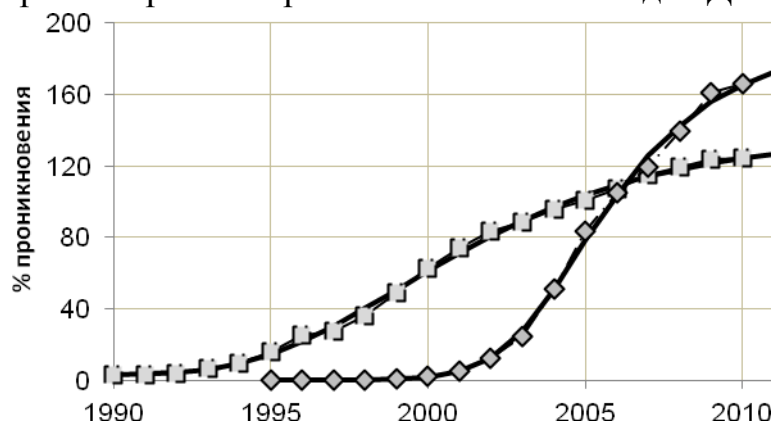


Рис. 4. Моделирование рынков сотовой связи Дании и России:

—◆— Россия; —■— Дания; — модели

Жители Японии в числе первых начали активно пользоваться услугами мобильной связи. Первая стадия развития быстро сменилась второй: точка перегиба модели расположена намного левее половины уровня насыщения.

Третья стадия (угасание роста) является одной из самых медленных в мире и продолжается вот уже более 10 лет.

Емкости рынков сотовой связи схожи для Японии, Дании и Белоруссии и не превышают 140%, т.е. на одного человека приходится 1,4 SIM-карты (или приблизительно четыре SIM-карты на троих). Намного ниже емкость рынка в США: в среднем, у каждого жителя только одна SIM-карта, а по две – лишь у каждого восьмого. Самая высокая емкость рынка в России: в среднем, на каждого жителя приходится по две SIM-карты. Рынки России и Белоруссии описываются одной и той же моделью (6), точки перегиба кривых совпадают, при этом емкость рынка Белоруссии меньше емкости рынка России.

Среди рассмотренных стран СНГ жители Украины позднее всех стали пользоваться услугами сотовой связи (точка перегиба находится между 2005 и 2006гг.), однако рынок быстро достиг насыщения в 120%. Модель рынка Украины среди рассмотренных стран является единственной моделью, точка перегиба которой расположена *справа* относительно половины уровня насыщения. Это означает, что вторая стадия линейного роста логистической кривой быстро сменилась третьей, которая привела к уровню насыщения буквально за 2-3 года.

В [17] отмечалось, что от начала процесса развития сотовой связи в Европе до его завершения проходит приблизительно 10-11 лет.

Исследования позволили сделать другой вывод: процесс развития рынка сотовой связи (и не только в Европе) занимает не менее 15 лет, а в отдельных случаях и до 20 лет. Таким образом, применение логистических кривых с произвольной асимметрией позволило получить более точные количественные оценки динамики мировых рынков сотовой связи.

Известно общее предположение, что симметрия логистического тренда в большей мере характерна для явлений и процессов из неживой природы и техники, а асимметрия преимущественно относится к живой природе, к социальным (в широком смысле, понимаются не только сообщества людей, но и растений, животных) явлениям и процессам. Полученные результаты, по сути, подтвердили это утверждение, так как характеризуют общество (социум) по отношению к средствам связи и информационно-коммуникационным технологиям.

Литература

1. *Эконометрика: учеб. [Текст]/под ред. В.С. Мхитаряна. – М.: Проспект, 2008. – 384 с.*
2. *Гришин, А.Ф. Статистические модели в экономике [Текст]/А.Ф. Гришин, С.Ф. Котов-Дарти, В.Н. Ягунов – Ростов н/Д: Феникс, 2005. – 344 с.*
3. *Семенычев, В.К. Информационные системы в экономике. [Текст]/ В.К. Семенычев, Е.В. Семенычев. Эконометрическое моделирование инноваций. Самара: Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та. 2006. – 216 с.*

4. *ITU Statistics: cellular subscriptions per 100 inhabitants, 2000-2010* [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.itu.int/ITU-D/ict/statistics/material/excel/2010/Mobile_cellular_00-10.xls
5. *Measuring the Information Society 2011: Publication of International Telecommunication Union* [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.itu.int/ITU-D/ict/publications/idi/2011/Material/MIS_2011_without_annex_5.pdf
6. *Mobile cellular telephone subscriptions per 100 population: The United Nations Statistics Division of the Department of Economic and Social Affairs* [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://data.un.org/Data.aspx?d=MDG&f=seriesRowID%3A756>
7. Höök, M. *Descriptive and Predictive Growth Curves in Energy System Analysis* [Текст] / Mikael Höök, Junchen Li, Noriaki Oba, Simon Snowden // *Natural Resources Research*. – 2011. – Volume 20, № 2. – С. 103-116.
8. Кожухова, В.Н. *Применение комплекса симметричных и асимметричных логистических моделей для описания эволюционирующей динамики* [Текст] / *Математические модели современных экономических процессов, методы анализа и синтеза экономических механизмов. Сб. ст. VI-й Всерос. науч.-практ. конф. Вып.6. Под ред. Зибарева А.Г., Новикова Д.А./ Самарский государственный аэрокосмический университет – Самара, 2011. – С.39-45.*
9. Giovanis, A.N. *A Stochastic Logistic Innovation Diffusion Model Studying the Electricity Consumption in Greece and USA* [Текст] / A.N. Giovanis, C.H. Skiadas // *Technological Forecasting and Social Change*. – 1999. – № 61– С. 235-246.
10. Grübler, A. *The Rise and Fall of Infrastructures* [Текст] / *Dynamics of Evolution and Technological Change in Transport, International Institute for Applied System Analysis, Laxenburg, Austria, Physica-Verlag, Heidelberg, Germany, 1990. – 305 с.*
11. Debecker, A., T. Modis. *Determination of the uncertainties in S-curve logistic fits* [Текст] / A. Debecker, T. Modis. // *Technological Forecasting and Social Change*. – June 1994. – Vol. 46, №. 2. – С. 153-173.
12. Кожухова, В.Н. *Исследование зависимости качества идентификации модели Верхулста от объема выборки и положения точки перегиба* [Текст] / *Математическое моделирование, численные методы и информационные системы. Сб. ст. Межвузовской научно-практической конференции/ Самарская академия государственного и муниципального управления. – Самара, 2011. – С.17-24.*
13. *Wikipedia, the free encyclopedia: Gauss–Newton algorithm.* [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://en.wikipedia.org/wiki/Gauss–Newton_algorithm.
14. Библиотека алгоритмов *ALGLIB*. Алгоритм Левенберга-Марквардта [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://alglib.sources.ru>.

15. Кожухова, В.Н. Применение модели логистической динамики Верхулста для описания жизненных циклов товаров [Текст] / В.Н. Кожухова, В.К. Семенычев // Известия Академии управления: теория стратегия, инновации: теоретический и научно-методический журнал / Самара: Изд-во «Самарский муниципальный институт управления». – 2010. – №1. – С 37-46.

16. Осовский, С. Нейронные сети для обработки информации [Текст] / Пер. с польского И.Д. Рудинского. – М.: Финансы и статистика, 2002. – 344 с.

17. Афанасьева, К.Е. Прогнозирование региональных рынков сотовой связи [Текст] / К.Е. Афанасьева, В.И. Ширяев // Проблемы прогнозирования – 2007. – №5. – С. 97–105.