

Семенычев В.К., Семенычев Е.В., Данилова А.А. Атлас параметрического формирования дифференциальных логистических кривых жизненного цикла продукта. Известия Академии управления: теория, стратегии, инновации. Самара. Изд-во «САГМУ». 2012. №2(9). - С.3 – 13.

**УДК 330**

**Семенычев В.К., Семенычев Е.В., Данилова А.А.**

**Атлас параметрического формирования  
дифференциальных логистических кривых жизненного цикла  
продукта**

*Рассмотрены свойства дифференциальных логистических кривых жизненного цикла продукта Хабберта, Гаусса, Капицы, Хаммонда-Маккея при помощи изменения их параметров, а также и формирования их асимметрии логистами Верхулста, Гомперца, Ричардса и Рамсея. Исследования позволяют обосновать первоначальный выбор моделей дифференциальных логистических кривых и осуществлять ее коррекцию в процессе изменения траектории из-за вариации факторов, воздействующих на кривую жизненного цикла.*

**Ключевые слова:** жизненный цикл продукта, модели Хабберта, Гаусса, Хаммонда-Маккея, Верхулста, Гомперца, Ричардса и Рамсея, первоначальный выбор и коррекция моделей.

При исследовании жизненного цикла продукта (товаров, услуг, организаций) широко применяют кумулятивные (накопленные) логистические кривые Верхулста, Гомперца, Ричардса, Рамсея и др.[1]. Однако затруднено нахождение визуального различия между ними и выбор более адекватной модели: воспроизводящей с необходимой полнотой все характеристики жизненного цикла продукта, существенные для целей моделирования и прогнозирования.

В силу этого представляется целесообразным обращение к сравнению кривых жизненного цикла по производным от кумулятивных логистических кривых, т.е. к дифференциальным (импульсным) логистическим кривым. Аналогично делается в теории вероятностей: переходят от интегральных функций распределения вероятностей к дифференциальным законам (к плотности распределения вероятностей).

Многообразие дифференциальных логистических кривых в реальной экономической практике ставит задачу идентификации моделей дифференциальных кривых для первоначального выбора подходящей (адекватной).

При вариации внешних и внутренних факторов, определяющих жизненный цикл продукта, на новых наблюдениях может возникнуть задача коррекции или смены модели в связи с изменением ее траектории.

Общим для дифференциальных кривых является колоколообразный вид, напоминающий график плотности нормального распределения, моделирующий жизненный цикл продукта с этапами роста и падения. Рассмотрим наиболее известные и широко употребляемые на практике модели [1].

Первой из них является формула Хабберта:

$$Y(t) = \frac{2Y_{\max}}{1 + \operatorname{ch}(\sigma(t - t_0))} + \varepsilon(t), \quad (1)$$

где  $Y(t)$  – уровень наблюдений в момент времени  $t$ ,  $Y_{\max}$  – максимальное значение (пик),  $\sigma$  – параметр модели,  $t_0$  – момент времени, при котором достигается пик,  $\varepsilon(t)$  – значение стохастической компоненты в наблюдениях,  $\operatorname{ch}$  – гиперболический косинус.

В качестве второй рассмотрим модель С.П. Капицы:

$$Y(t) = \frac{Y_{\max} \cdot \sigma^2}{(t - t_0)^2 + \sigma^2} + \varepsilon(t). \quad (2)$$

Известна также модель Гаусса:

$$Y(t) = Y_{\max} e^{-\frac{(t-t_0)^2}{\sigma^2}} + \varepsilon(t). \quad (3)$$

Четвертой выбрана модель Хаммонда-Маккея:

$$Y(t) = \frac{Y_{\max}}{Norm} t^{\sigma \cdot t_0} e^{-\sigma \cdot t}, \quad (4)$$

где  $Norm = t_0^{\sigma \cdot t_0} e^{-\sigma \cdot t_0}$  – параметр нормирования, вводимый для возможности сравнения видов моделей в одном диапазоне значений.

Графики сравниваемых моделей и представлены на рис. 1.

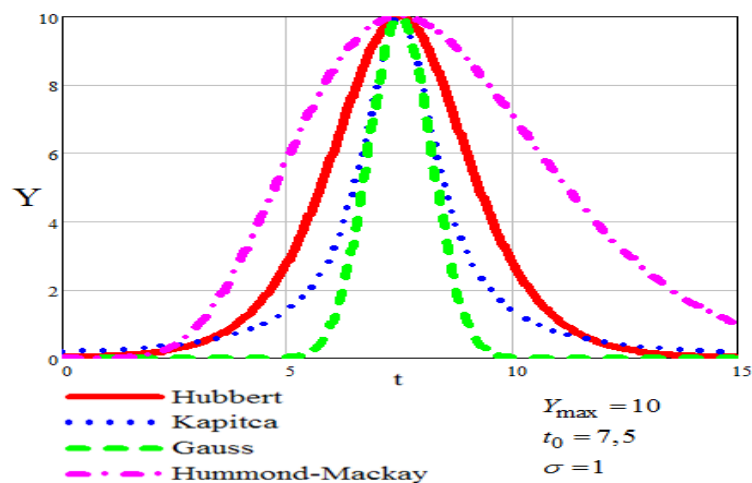


Рис. 1. Сравнение симметричных моделей

Внутренние и внешние факторы могут менять динамику на этапах и роста, и падения уровней траектории жизненного цикла. Может появиться и ярко выраженная асимметрия между этапами.

Во-первых, определим влияние параметров моделей на форму и динамику этапов кривой жизненного цикла.

Во-вторых, оценим возможность влияния на асимметрию кривой жизненного цикла введением в рассматриваемые модели (1) – (4) дополнительных функций (законов) изменения параметра  $\sigma$  во времени.

Если принять величину  $\sigma$  постоянной, то будем иметь частный случай, при котором сравниваемые модели сохраняют симметричный вид (за исключением модели (4)):

$$\sigma(t) = \sigma_1. \quad (5)$$

Для обеспечения асимметрии можно предположить, что уровень наклона  $\sigma$  в моделях изменяется по нелинейному логистическому закону: от  $\sigma_1$  (например, на этапе роста) до  $\sigma_2$  (например, на этапе падения кривой жизненного цикла).

Параметрическое управление этим может, например, обеспечить кумулятивная функция логиста Верхулста:

$$\sigma(t) = \sigma_1 + \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{1 + e^{-\frac{t-t_0}{\sigma_T}}}, \quad (6)$$

где  $t_0$  – момент времени, при котором происходит перегиб (равенство нулю второй производной) логисты кривой,  $\sigma_T$  – скорость перехода между уровнями логисты.

Можно использовать и закон Ричардса, представляющий собой, при значении параметра  $\sigma_{T_1} \neq 1$ , обобщение логисты Верхулста:

$$\sigma(t) = \sigma_1 + \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\left(1 + e^{-\frac{t-t_0}{\sigma_T}}\right)^{\sigma_{T_1}}}. \quad (7)$$

Можно проанализировать и возможность использования логисты Гомперца:

$$\sigma(t) = \sigma_1 + (\sigma_2 - \sigma_1)e^{-0.7e^{-\frac{t-t_0}{\sigma_T}}}. \quad (8)$$

Также рассмотрим логисту Рамсея:

$$\sigma = \sigma_1 + (\sigma_2 - \sigma_1) \left( 1 + \left[ 1 + \frac{t-t_0}{\sigma_T} \right] e^{-\frac{t-t_0}{\sigma_T}} \right), \quad (9)$$

для  $t \geq t_0^*$  и  $\sigma = \sigma_1$  при  $t \leq t_0^*$ , где  $t^* = t_0 - 1,678\sigma_T$ .

На рис. 2 приведены графики кривых Верхулста, Ричардса, Гомперца и Рамсея.

Влияние параметра  $\sigma_T$  помогает понять график, приведённый на рис. 3, демонстрирующий логисту Верхулста при различных значениях и знаках этого параметра.

Видим, что  $\sigma_T$  отвечает за скорость и направление перехода кривых от одной асимптоты к другой.

Модуль  $\sigma_T$  определяет продолжительность фазы изменения кривой от одного предела к другому, положительный знак параметра делает функцию, задающую асимметрию кривой жизненного цикла, монотонно возрастающей, а отрицательный знак – убывающей.

Для других кривых изменение параметра  $\sigma_T$  приводит к аналогичному видоизменению кривой.

Влияние параметра  $\sigma_{T_1} \neq 1$  на вид кривой Ричардса отражает график на рис. 4.

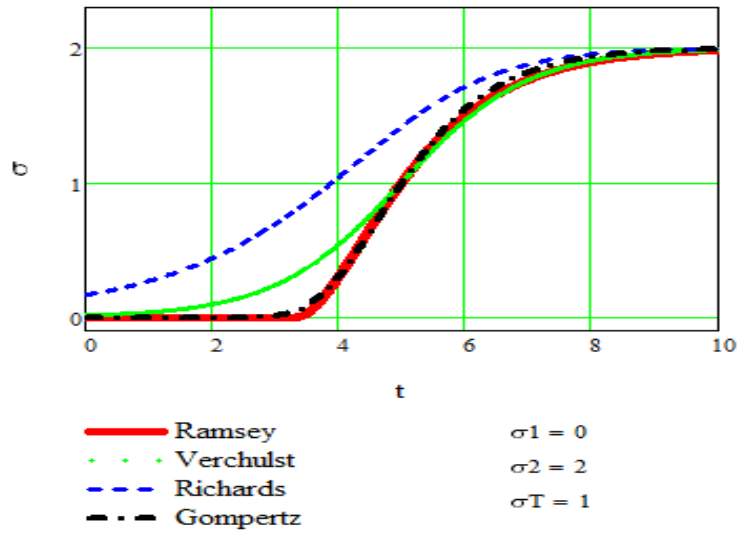


Рис. 2. Вид логист, управляющих асимметрией кривых жизненного цикла

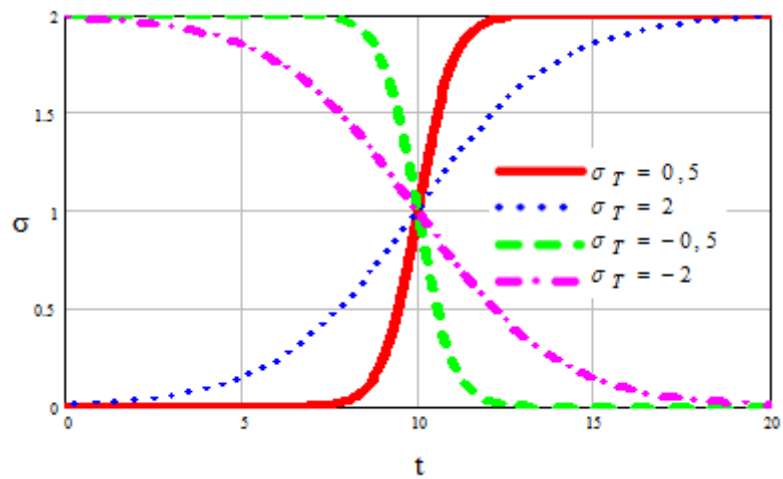


Рис. 3. Вид кривой Верхулста при изменении  $\sigma_T$

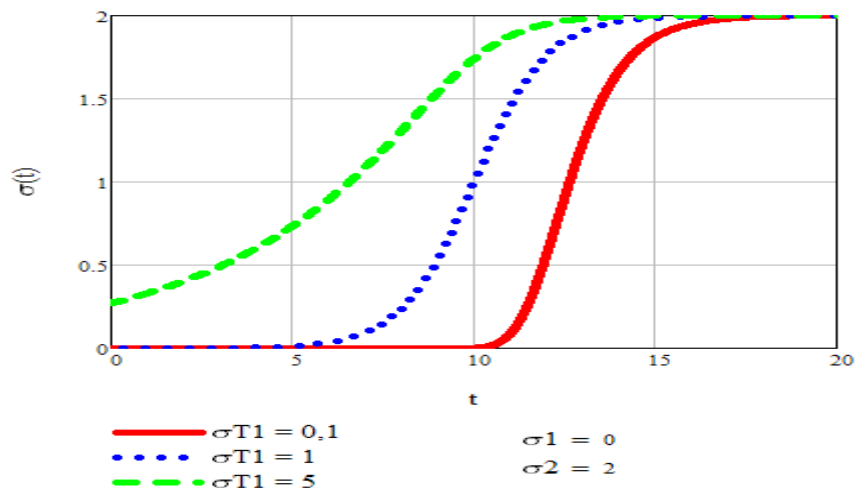


Рис.4. Вид кривой Ричардса при изменении  $\sigma_{T1}$

Рис. 4 показывает, что параметр  $\sigma_{T_1}$  определяет степень асимметрии логисты, позволяет дополнительно регулировать продолжительность перехода кривой от одного предела к другому.

Вместе с тем, наличие параметра  $\sigma_{T_1}$  лишает возможности получения зеркально отображения кривой путём изменения знака параметра. Для получения убывающей кривой Ричардса достаточно установить значение параметра  $\sigma_2$  выше, чем  $\sigma_1$  (рис.5).

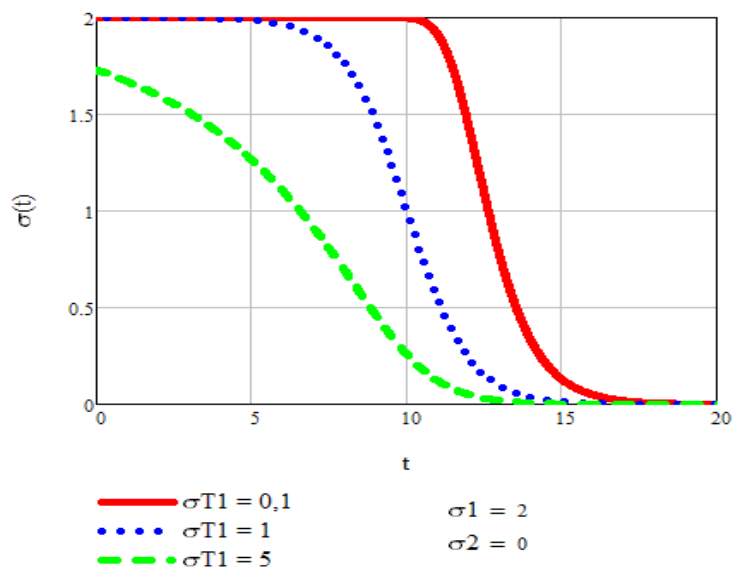


Рис. 5. Вид кривой Ричардса при  $\sigma_1 > \sigma_2$

### Рассмотрим симметричные дифференциальные кривые.

Обстоятельный анализ кривых Хабберта и Гаусса проведен в [2]. Кривая Хабберта имеет более «широкую» вершину и быстро спадающие крылья.

Как оказывается, этих отличий достаточно, чтобы в многочисленных приложениях, например, при моделировании и прогнозировании жизненного цикла добычи нефти, зачастую предпочесть именно кривую Хабберта [1].

Сравним с кривой Хабберта и кривую Капицы. График моделей и их производных приведены на рис. 6. Модель Капицы в отличие от модели Хабберта имеет более близко расположенные к точке пика добычи точки перегиба, означающие окончание одного этапа жизненного цикла и начало другого.

Названные выше характерные черты кривой Хабберта при таком сравнении проявляются ещё чётче.

**Для асимметричных дифференциальных моделей жизненного цикла предлагается методика, включающая следующие этапы:**

- 1) поиск точки перегиба дифференциальных моделей на интервале, следующем за точкой пика для каждой кривой, и вычисление в этих точках первой производной;
- 2) сравнение кривых дифференциальных моделей по скорости падения;
- 3) вычисление длительности этапа спада (за окончание этапа спада примем уровень добычи равный 1% от пикового уровня);
- 4) сравнение кривых дифференциальных моделей по длительности этапа спада.

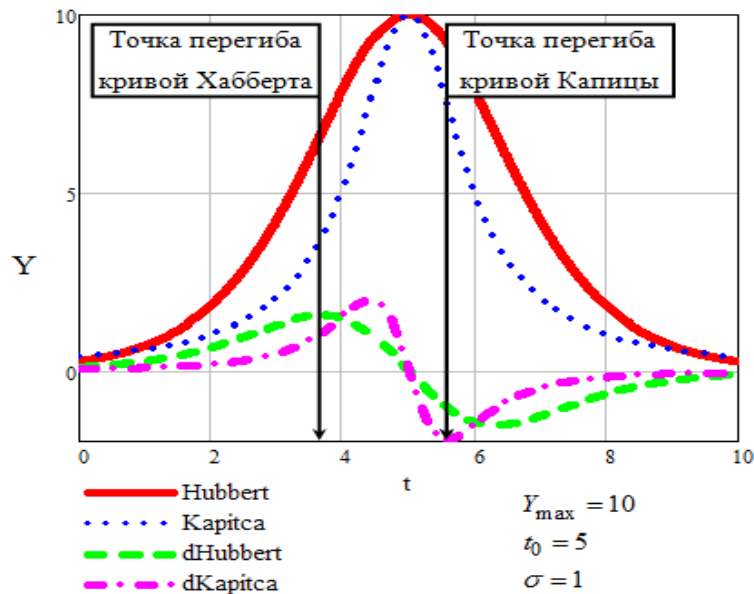


Рис. 6. Кривые Хабберта и Капицы и их характеристики

В соответствии с предложенной методикой найдём для кривых, изображённых на рис. 1, значения первой производной в точках перегиба:

для Хабберта.....	-0,385,
для Капицы.....	-0,650,
для Гаусса.....	-0,858,
для Хаммонда-Маккея.....	-0,210.

Полученные значения говорят о том, что быстрее всех в точке перегиба, а значит и на протяжении всего этапа спада, убывает кривая Гаусса. Медленней других убывает кривая Хаммонда-Маккея.

Длительность этапа спада составляет для кривых:

Хабберта.....	4,623,
Капицы.....	9,466,
Гаусса.....	1,453,
Хаммонда-Маккея.....	7,854.

Не смотря на то, что медленнее других убывала кривая Хаммонда-Маккея, самый длительный этап спада продемонстрировала кривая Капицы, что достигнуто за счёт расположения точки перегиба этой кривой Капицы. Из рис.1 видно, что она имеет более пологий вид, чем кривая Хаммонда-Маккея.

**Рассмотрим теперь управление асимметрией дифференциальных моделей жизненного цикла по закону Верхулста.**

При асимметрии трендов в этом случае может быть получен и симметричный вариант, что демонстрирует рис. 7.

При этом очевидно, что симметрия достигается при равенстве параметров  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , поскольку в этом случае логиста Верхулста (5) вырождается (что легко заметить из вида функции) в константу равную  $\sigma_1$ . Исследуем, как зависит вид моделей от значения параметров  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ . Для этого построим графики рассматриваемых моделей для различных значений параметров (рис. 8).

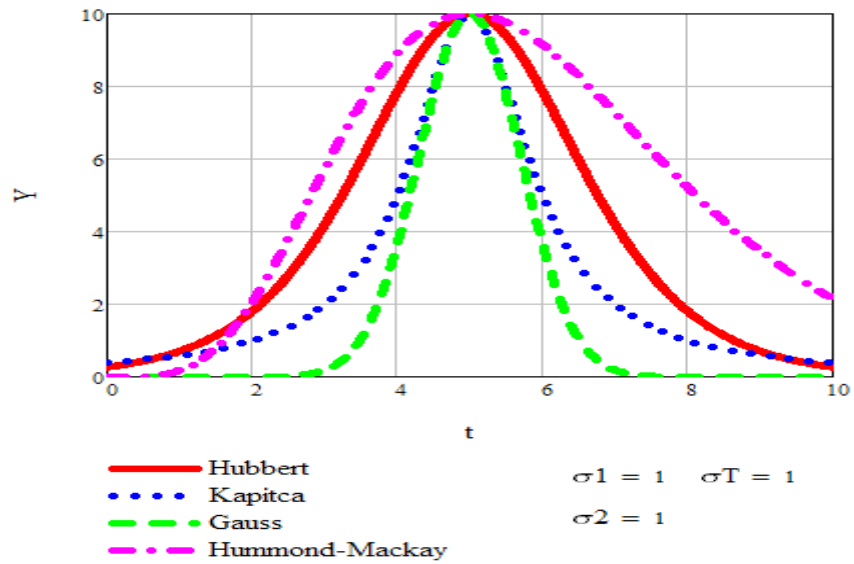


Рис. 7. Симметричный вид дифференциальных моделей жизненного цикла с заданием асимметрии логистой Верхулста

Видим, что изменение параметров  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  сказались на виде моделей по-разному. Например, увеличение параметра  $\sigma_1$  привело к увеличению продолжительности этапа спада у моделей Хабберта и Хаммонда-Маккея в случае а), а для моделей Капицы и Гаусса аналогичные результаты были получены при увеличении параметра  $\sigma_2$  в случае г).

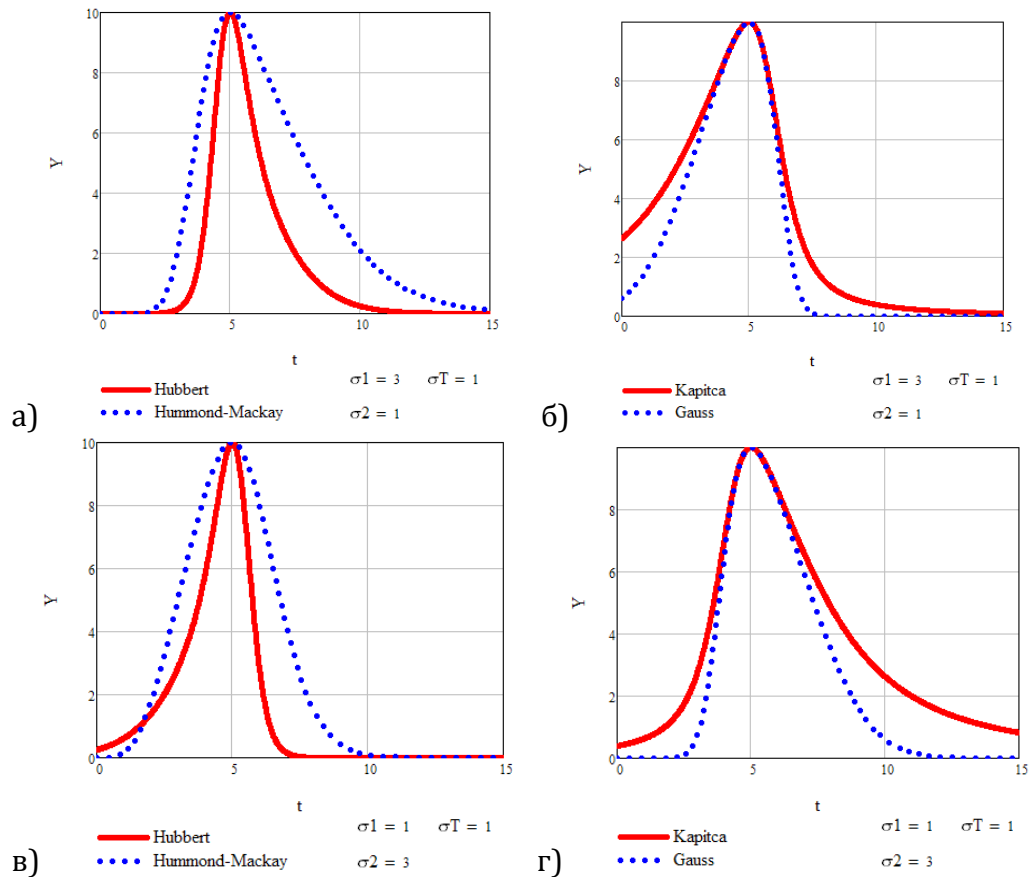


Рис. 1. Дифференциальные модели жизненного цикла с заданием асимметрии по закону Верхулста при разных значениях параметров  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ : а) и б) при  $\sigma_1 > \sigma_2$ ; в) и г) при  $\sigma_1 < \sigma_2$

Полученные выше результаты исследования параметров логисты Верхулста (5), говорят о том, что изменение знака параметра  $\sigma_T$  приведёт к зеркальному отображению её графика.

Проверим это для случаев в) и г), когда увеличилась продолжительность этапа роста. Видоизменённые графики приведены на рис. 9.

Из рис. 9 видно, сделанное нами предположение полностью подтвердилось: получены графики кривых с увеличенной продолжительностью этапа спада.

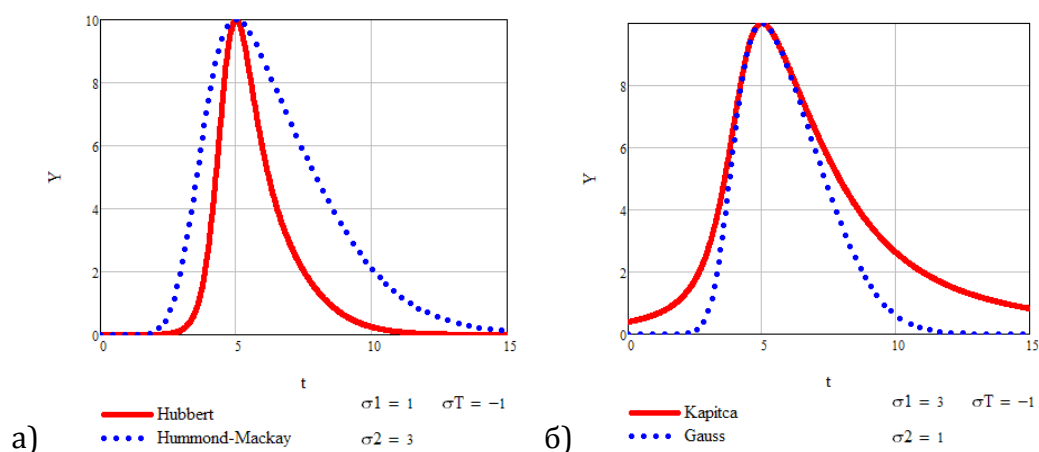


Рис. 9. Дифференциальные модели жизненного цикла моделей с заданием асимметрии по закону Верхулста при отрицательном знаке параметра  $\sigma_T$

Применим предложенную методику исследования вида асимметричных моделей для случаев а) и г), приведённых на рис. 8. Значения первой производной в точках перегиба составляют для кривых:

Хабберта.....	-0,527,
Капицы.....	-0,207,
Гаусса.....	-0,264,
Хаммонда-Маккея.....	-0,201.

Полученные значения говорят о том, что медленнее всех в точке перегиба, а значит и на протяжении всего этапа спада, убывают кривые Хаммонда-Маккея и Капицы. Быстрее других убывает кривая Хабберта.

Длительность этапа спада составляет для кривых:

Хабберта.....	5,379,
Капицы.....	28,616,
Гаусса.....	4,572,
Хаммонда-Маккея.....	8,754.

Для кривой Капицы длительность этапа спада в несколько раз превысила показатели других моделей. Очевидно, что продемонстрированный для симметричного случая результат распространился и на случай применения закона Верхулста.

Таким образом, с помощью имеющегося набора параметров логисты Верхулста можно получить интересующий нас вид кривой для любого из четырёх трендов, сохранив при этом их особенности, которые могут обеспечить получение более точного прогноза.

**Особенностью логисты Ричардса** является наличие дополнительного параметра  $\sigma_{T_1}$ , поэтому интерес вызывает влияние динамики этого параметра на вид кривой.



Поскольку этот параметр стоит в знаменателе формулы (7), необходимо сравнить случаи, когда этот параметр является целым числом, со случаями, когда он представлен дробными значениями. Соответствующие варианты графиков приведены на рис. 10.

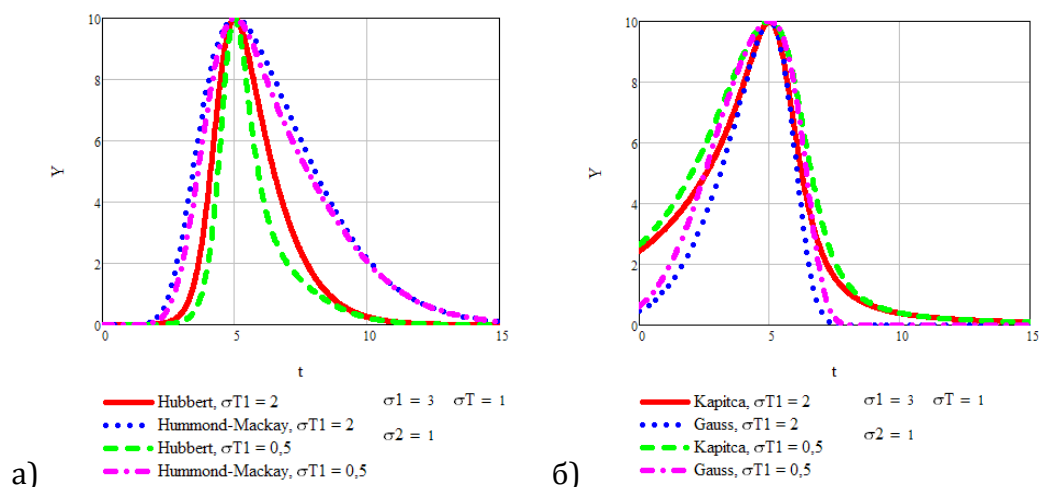


Рис. 10. Вид моделей с законом Ричардса при различных значениях параметра  $\sigma_{T1}$

Как видно из графика на рис. 10, изменение параметра сильнее сказалось на более пологой стороне кривых. По характеру влияния этого параметра модели можно разделить на две группы.

В первую группу вошли модели Хабберта и Хаммонда-Маккея (рис. 10 а)), для которых переход от целого значения параметра к дробному значению заставил их возрастать и убывать быстрее. Во второй группе оказались модели Капицы и Гаусса (рис. 10 б)), для которых, в отличие от предыдущих моделей, скорость изменения упала и их графики стали шире.

Найдём скорость и продолжительность этапов спада для случая, приведённого на рис. 10 а). Значения первой производной в точках перегиба составляют:

- для Хабберта при  $\sigma_{T1} = 2$  .....-0,422,
- для Хаммонда-Маккея при  $\sigma_{T1} = 2$  .....-0,200,
- для Хабберта при  $\sigma_{T1} = 0,5$  .....-0,729,
- для Хаммонда-Маккея при  $\sigma_{T1} = 0,5$  .....-0,229.

Скорость падения для кривой Хабберта возросла сильнее, чем для кривой Хаммонда-Маккея. В этом результаты расчёта совпали с анализом графиков моделей, приведённым выше. Длительность этапа спада составляет для кривых:

- Хабберта при  $\sigma_{T1} = 2$  .....5,191,
- Хаммонда-Маккея при  $\sigma_{T1} = 2$  .....8,167,
- Хабберта при  $\sigma_{T1} = 0,5$  .....5,454,
- Хаммонда-Маккея при  $\sigma_{T1} = 0,5$  .....9,100.

Протяженность этапов спада для моделей, не смотря на возросшие скорости падения, незначительно возросла.

**Набор параметров дифференциальных моделей жизненного цикла при задании асимметрии законом Гомперца** аналогичен набору для закона Верхульста. Можно провести сравнение моделей, использующих эти законы, между собой, задав

одинаковые значения параметров. Построим графики для использованных ранее в модели Верхулста значений параметров. Они приведены на рис. 11.

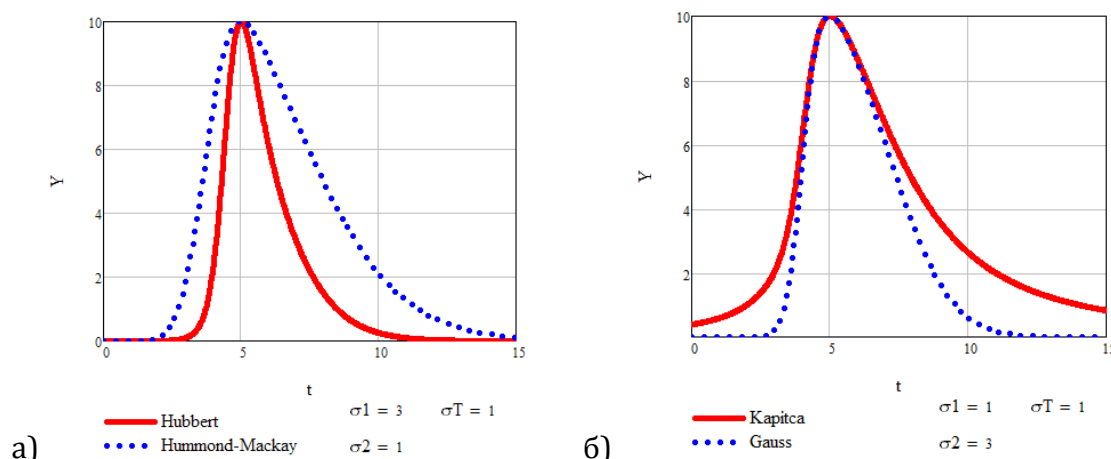


Рис. 11. Вид модели жизненного цикла с заданием асимметрии по Гомперцу при разных значениях параметров  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ :  
 а) при  $\sigma_1 > \sigma_2$ ; б) при  $\sigma_1 < \sigma_2$ .

Визуальное сравнение графиков для законов Верхулста и Гомперца показывает, что отличия между ними отсутствуют. Проверим предположение, вычислив скорость убывания кривых на этапах спада и продолжительность этих этапов. Значения первой производной в точках перегиба составляют для кривых:

Хабберта.....	-0,479,
Капицы.....	-0,204,
Гаусса.....	-0,267,
Хаммонда-Маккея.....	-0,195.

Полученные значения показали, что некоторые различия между моделями присутствует. Наиболее сильное отличие в скорости падения продемонстрировала кривая Хабберта: для закона Гомперца падение происходит на 0,048 медленнее, чем для закона Верхулста. Длительность этапа спада составляет для кривых:

Хабберта.....	5,379,
Капицы.....	28,396,
Гаусса.....	4,430,
Хаммонда-Маккея.....	8,391.

В отличие от скорости изменения динамики, продолжительность падения функции Хабберта при асимметрии Гомперца совпала с рассчитанной при асимметрии Верхулста. Другие модели продемонстрировали расхождение в пределах от 0,142 для модели Гаусса до 0,365 для модели Хаммонда-Маккея.

### Рассмотрим управление асимметрией дифференциальных моделей жизненного цикла по закону Рамсея.

Данный случай также аналогичен примеру с асимметрией Верхулста. Зададим одинаковые значения для использованных ранее в модели Верхулста параметров, построим графики и проведем сравнение моделей. Модели с асимметрией Рамсея приведены на рис. 12.

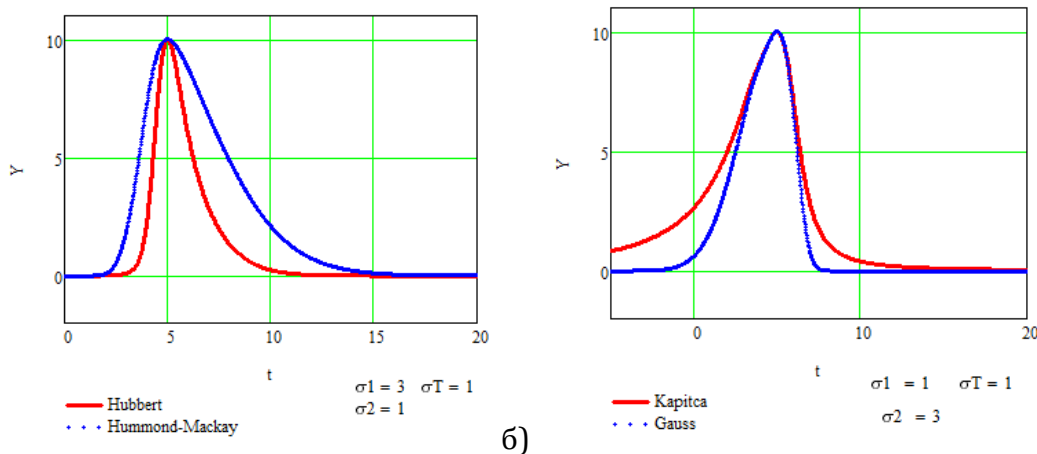


Рис. 12. Вид модели жизненного цикла с заданием асимметрии по Рамсею при разных значениях параметров  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ : а) при  $\sigma_1 > \sigma_2$ ; б) при  $\sigma_1 < \sigma_2$ .

Вычислим скорость убывания кривых на этапах спада и продолжительность этих этапов. Значения первой производной в точках перегиба составляют для кривых:

Хабберта.....	-0,506,
Капицы.....	-0,209,
Гаусса.....	-0,269,
Хаммонда-Маккея.....	-0,203.

Сравним текущие результаты с полученными данными ранее по моделям с асимметриями Верхулста и Гомперца. Быстрее всех убывает модель Хабберта, причем есть различия в пределах от 0,021 для асимметрии Верхулста до 0,027 для асимметрии Гомперца.

Длительность этапа спада составляет для кривых:

Хабберта.....	5,344,
Капицы.....	28,517,
Гаусса.....	4,562,
Хаммонда-Маккея.....	8,6.

Длительности этапа спада для модели Гаусса с асимметриями Верхулста и Рамсея различается всего на 0,01. Наиболее существенные различия в полученных значениях присущи модели Хаммонда-Маккея с асимметриями Гомперца и Рамсея. Расхождение составляет 0,209.

Наиболее общим методом идентификации логистических кривых является метод генетического моделирования [1].

Проведенные исследования позволяют обосновать из полученного атласа первоначальный визуальный выбор моделей логист, провести их идентификацию, оценить точность и, в случае необходимости, осуществлять коррекцию моделей из-за вариации факторов, воздействующих на кривую жизненного цикла.

Коррекция может быть вызвана систематическими отклонениями (уменьшением, увеличением или асимметрией) новых наблюдений по сравнению с постулированными первоначально выбранной моделью.

Коррекцию можно рассматривать как адаптацию (параметрическую или структурную) при эволюции кривой по новым, наиболее важным для реализации прогнозирования, наблюдениям.

## **Литература**

1. Семёнычев В.К., Семёнычев Е.В. Параметрическая идентификация рядов динамики: структуры, модели, эволюция: монография. – Самара: Изд-во «СамНЦ РАН», 2011. - 364 с.
2. Петров В.В., Поляков Г.А., Полякова Т.В. Долгосрочные перспективы российской нефти (анализ, тренды, сценарии) – М.: ФАЗИС, 2003. - 200 с.